MA2401 Geometri
Vår 2018

Løsningsforslag — Øving 6

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

4.5 1 La ΔABC være en trekant, og la D være et punkt på $\overleftrightarrow{AB}$ slik at $A{*}B{*}D$. Utsagnet vi skal vise er at

$$\mu(\angle CAB) + \mu(\angle BCA) \leq \mu(\angle DBC),$$

se også figuren. Av Sacherri-Legendres teorem vet vi at

$$\mu(\angle CAB) + \mu(\angle BCA) + \mu(\angle ABC) \leq 180°.$$

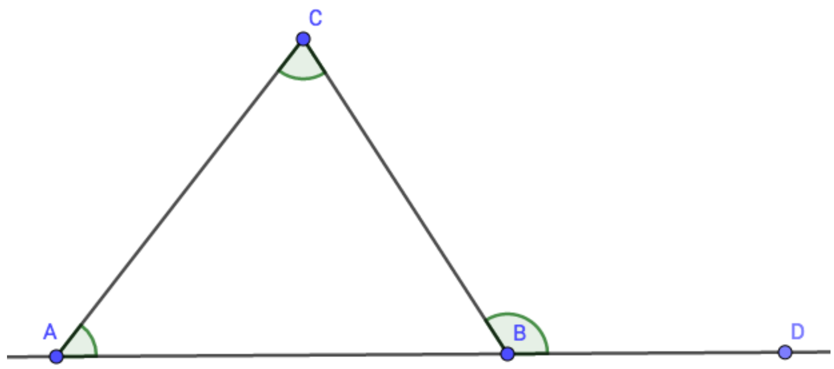
Dermed er

$$\mu(\angle CAB) + \mu(\angle BCA) \leq 180° - \mu(\angle ABC).$$

Av lineært-par teoremet vet vi også at

$$\mu(\angle DBC) = 180° - \mu(\angle ABC),$$

og ved å kombinere de to forrige ligningene får vi resultatet vi skulle vise.



Figur 1: Figur til oppgave 4.5 1. Vi skal vise at den markerte ytre vinkelen har minst like stort vinkelmål som summen av de to markerte indre vinklene. Beviset kombinerer Saccheri-Legendres teorem og lineært par-teoremet.

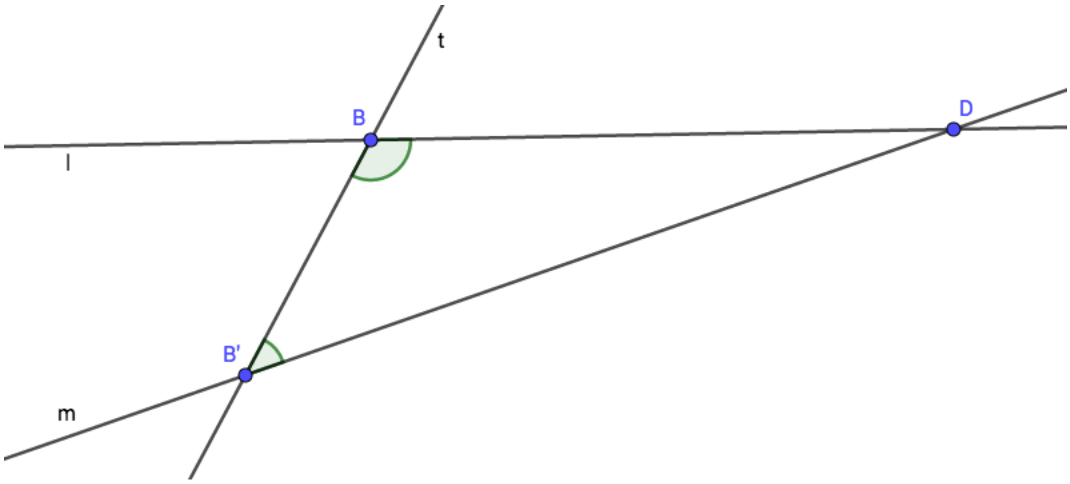
4.5 2 La l og m være to ulike linjer som begge skjæres av ei linje t. Vi må vise at summen av vinkelmålene til de indre vinklene på den siden av t der l og m skjærer hverandre er strengt mindre enn 180°.
La oss først ordne litt notasjon, slik at det blir klart hva vi faktisk må vise her – etter at det er gjort løser oppgaven seg nesten selv. Anta at t skjærer l i punktet B, og at t skjærer m i punktet B'. Anta så at l og m skjærer hverandre i D. Se figuren. Det vi skal vise er da at

$$\mu(\angle DBB') + \mu(\angle BB'D) < 180°.$$

Men dette følger lett av Saccheri-Legendres teorem anvendt på trekanten $\Delta DBB'$, siden dette teoremet gir at

$$\mu(\angle DBB') + \mu(\angle BB'D) + \mu(\angle B'DB) \leq 180°.$$

Siden $\mu(\angle B'DB) > 0$ av del 2 av gradskivepostulatet, følger resultatet.



Figur 2: Figur til oppgave 4.5 2. Vi skal vise at summen av vinkelmålet av de to markerte vinklene er mindre enn 180°, noe som følger lett av Saccheri-Legendres teorem.

$\boxed{4.6\ 1}$ La $\square ABCD$ være en konveks firkant (=quadrilateral). Vi skal vise at

$$\mu(\angle ABC) + \mu(\angle BCD) + \mu(\angle CDA) + \mu(\angle DAB) \leq 360°.$$

Dette kan vi vise ved å dele firkanten i to trekanter, og bruke Saccheri-Legendre på hver trekant, se figuren. Saccheri-Legendre anvendt på ΔABC og ΔCDA[1] gir nemlig at

$$\mu(\angle ABC) + \mu(\angle BCA) + \mu(\angle CAB) \leq 180°$$

og

$$\mu(\angle CDA) + \mu(\angle DAC) + \mu(\angle ACD) \leq 180°.$$

Legger vi disse ligningene sammen, får vi at

$$\mu(\angle ABC) + \mu(\angle BCA) + \mu(\angle ACD) + \mu(\angle CDA) + \mu(\angle DAC) + \mu(\angle CAB) \leq 360°.$$

Ved å sammenligne denne ligningen med den vi skal vise, ser vi at det er nok å vise at $\mu(\angle BCA) + \mu(\angle ACD) = \mu(\angle BCD)$ og $\mu(\angle DAC) + \mu(\angle CAB) = \mu(\angle DAB)$. For å vise disse to likhetene må vi bruke at firkanten er konveks. En del av definisjonen av konveks(definisjon 4.6.2), er at A ligger i det indre av $\angle BCD$. Dermed gir del 4 av gradskivepostulatet[2] at

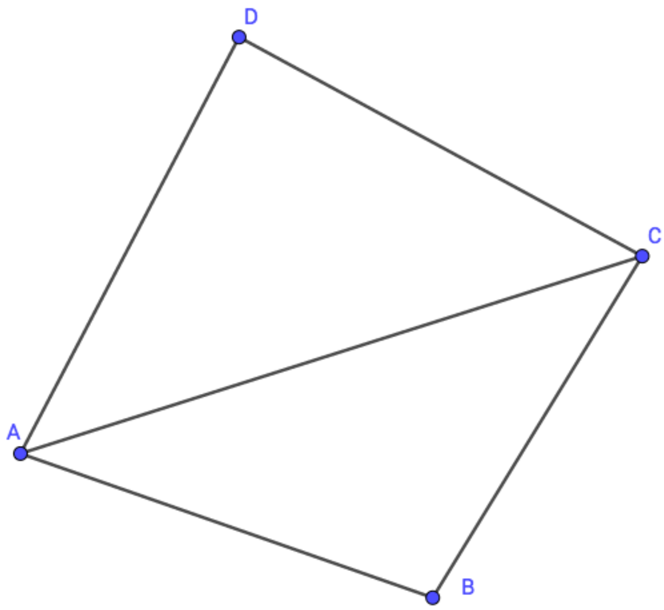
$$\mu(\angle BCA) + \mu(\angle ACD) = \mu(\angle BCD),$$

[1] Merk at dette faktisk er to trekanter! En del av definisjonen av firkant er nemlig at A, B, C ikke kan ligge på linje, og at C, D, A ikke kan ligge på linje.

[2] Betingelsen for å bruke del 4 av gradskivepostulatet er strengt tatt at strålen $\overrightarrow{CA}$ ligger mellom strålene $\overrightarrow{CD}$ og $\overrightarrow{CB}$. Men *per definisjon* betyr dette at A ligger i det indre av $\angle BCD$. Dermed kan vi trygt bruke del 4 av gradskivepostulatet når vi vet at A ligger i det indre av $\angle BCD$.

og på akkurat samme måte viser vi at

$$\mu(\angle DAC) + \mu(\angle CAB) = \mu(\angle DAB).$$



Figur 3: Figur til oppgave 4.6 1. Vi skal vise at vinkelsummen i firkanten ikke er større enn 360°. Vi deler firkanten i to trekanter, og bruke Saccheri-Legendre på hver trekant. For å fullføre beviset må vi bruke at firkanten er konveks.

$\boxed{4.6\ 2}$ Anta at $\square ABCD$ er et parallellogram, altså at $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ og $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$. Vi må vise at $\square ABCD$ er konveks, som betyr at hvert hjørne ligger i det indre av vinkelen definert av de tre andre hjørnene. For eksempel må vi vise at A ligger i det indre av $\angle BCD$. Husk hva det betyr at A ligger i det indre av $\angle BCD$: det betyr at A og B ligger på samme side av $\overleftrightarrow{CD}$, og at A og D ligger på samme side av $\overleftrightarrow{BC}$. La oss vise at dette holder:

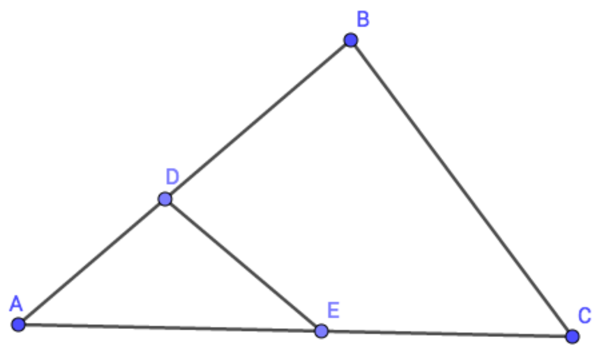
- Siden $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$, vet vi at $\overline{AD} \cap \overleftrightarrow{BC} = \emptyset$, noe som betyr at A og D ligger på samme side av $\overleftrightarrow{BC}$[3].
- På nøyaktig samme vis får vi at $\overline{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \emptyset$ siden $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, og dermed ligger A og D på samme side av $\overleftrightarrow{BC}$.

Dermed har vi at A ligger i det indre av $\angle BCD$. På helt tilsvarende vis kan vi vise at de andre punktene ligger i det indre av vinkelen definert av resten av punktene, slik at firkanten er konveks.

[3] Se proposisjon 3.3.4 hvis dette er litt rusten kunnskap for tiden.

4.6 5 La ΔABC være en trekant, la D være et punkt mellom A og B og la E være et punkt mellom A og C. Se figuren. Vi skal vise at $\square BCED$ er en konveks firkant. Av definisjonen av konvekshet for firkanter (definisjon 4.6.2) må vi vise at hvert hjørne i $\square BCED$ ligger i det indre av vinkelen definert av de tre andre hjørnene.

- E ligger i det indre av $\angle DBC$: Merk først at $\angle DBC = \angle ABC$, siden $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA}$. Siden vi vet at E ligger mellom A og C, vet vi at strålen $\overrightarrow{BE}$ skjærer det indre av $\overline{AC}$ [4]. Da sier teorem 3.5.3 at E ligger i det indre av $\angle ABC = \angle DBC$.
- D ligger i det indre av $\angle BCE$: Argumentet blir som over: vi har at $\angle BCE = \angle BCA$, og teorem 3.5.3 gir at D ligger i det indre av $\angle BCA$ siden $\overrightarrow{CD}$ skjærer $\overline{AB}$ i punktet D.
- B ligger i det indre av $\angle CED$: Av definisjonen av det indre av en vinkel, må vi vise at B og D ligger på samme side av $\overleftrightarrow{EC}$, og at B og C ligger på samme side av $\overleftrightarrow{ED}$. Siden både B og D ligger på strålen $\overrightarrow{AB}$, gir stråleteoremet (teorem 3.3.9) at B og D ligger på samme side av $\overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{EC}$. Merk så at B og A ligger på motsatt side av $\overleftrightarrow{ED}$, siden $\overline{AB}$ skjærer $\overleftrightarrow{ED}$ i D. På samme vis ligger C og A på motsatt side av $\overleftrightarrow{ED}$, siden $\overline{AC}$ skjærer $\overleftrightarrow{ED}$ i E. Siden A ligger på motsatt side av $\overleftrightarrow{ED}$ av både C og B, må vi konkludere med at C og B ligger på samme side av $\overleftrightarrow{ED}$.
- C ligger i det indre av $\angle EDB$: Bevises som i forrige punkt.

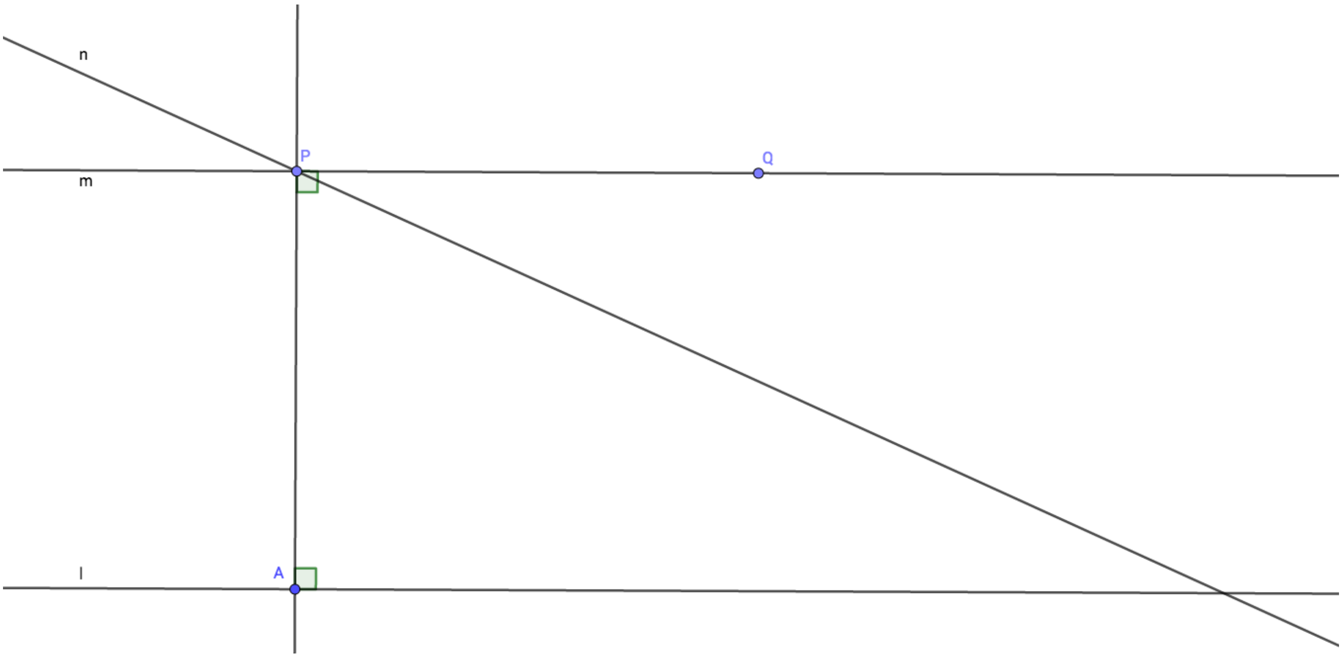


Figur 4: Figur til oppgave 4.6 5. Vi viser at $\square BCED$ er en konveks firkant, som betyr at vi må sjekke at hvert hjørne av firkanten ligger i det indre av vinkelen definert av de andre hjørnene.

4.7 2 Anta først at det euklidske parallellpostulatet holder – vi må vise at dersom $l \parallel m$ og ei linje $t \neq l$ skjærer l, så må t også skjære m (Proclus' aksiom). Vi bruker et motsigelsesbevis, og antar derfor at t skjærer l, men at t *ikke* skjærer m. Med andre ord har vi at $t \parallel m$. La så P være punktet hvor t skjærer m. Da er l og t to linjer gjennom P som er parallelle til m, noe som er en motsigelse til det euklidske parallellpostulatet. Dermed må vi konkludere med at t skjærer m, som var det vi skulle vise.

[4] $\overrightarrow{BE}$ skjærer tross alt dette linjestykket i punktet E!

Anta så at Proclus' aksiom holder, og at vi har ei linje l og et punkt P som ikke ligger på l. Vi må vise at det finnes ei unik linje m som inneholder P og er parallell med l. La A være punktet på l slik at $\overleftrightarrow{PA} \perp l$ – at A finnes og er unikt er teorem 4.1.3. Bruk så del 3 av gradskivepostulatet til å finne et punkt Q[5] slik at $\mu(\angle APQ) = 90°$. Da gir alternerende indre vinkel-teoremet at $l \parallel \overleftrightarrow{PQ}$, siden $\overleftrightarrow{PA}$ skjærer l og $\overleftrightarrow{PQ}$ slik at alle indre vinkler er rette. Dermed har vi funnet ei linje $m = \overleftrightarrow{PQ}$ slik at $m \parallel l$ og $P \in m$[6]. Det gjenstår å vise at linja m er den eneste linja som tilfredsstiller disse to betingelsene. Anta derfor at linja $n \neq m$ også er parallell med l og går gjennom P. Vi må vise at dette er umulig. Vi vet at l og m er parallelle linjer, og at n skjærer m i punktet P. Dermed sier Proclus' aksiom at n også må skjære l, men det er selvsagt en motsigelse til at $l \parallel n$. Dette fullfører beviset.



Figur 5: Figur til andre del av oppgave 4.7 2. Vi nedfeller en normal fra P til l for å finne punktet A. Så bruker vi gradskivepostulatet til å finne Q slik at $\mu(\angle APQ) = 90°$. Da gir alternerende indre vinkel-teoremet at $l \parallel \overleftrightarrow{PQ}$. For å vise at $m = \overleftrightarrow{PQ}$ er den *unike* linja gjennom P som er parallell med l bruker vi Proclus' aksiom på de tre linjene l, m, n.

$\boxed{\text{4.7 6}}$ Vi skal vise at det euklidske parallellpostulat (sammen med alle aksiomene i nøytral geometri) impliserer at alle trekanter har vinkelsum 180°. Vi kommer til å bruke at boka har vist at det euklidske parallellpostulat er ekvivalent med motsatsen til alternerende indre vinkel-teoremet i teorem 4.7.1 [7].

Ved hjelp av del 3 av gradskivepostulatet kan vi finne et punkt D slik at $\mu(\angle BCD) = \mu(\angle ABC)$, og slik at D og A ligger på motsatt side av $\overleftrightarrow{BC}$. Siden $\mu(\angle BCD) =$

[5]For å bruke gradskivepostulatet må vi strengt tatt spesifisere hvilket halvplan Q skal ligge i, men i akkurat dette tilfellet er det vilkårlig hvilket halvplan vi velger.

[6]Denne måten å konstruere ei linje gjennom et punkt P som er parallell med l kalles i boka "the double perpendicular construction". Det er interessant å merke seg at denne konstruksjonen ikke brukes det euklidske parallellpostulatet, og konstruksjonen fungerer derfor i nøytral geometri.

[7]Resultatet vi viser er del av teorem 4.7.4, så vi tillater oss å bruke resultatene vist før dette teoremet.

$\mu(\angle ABC)$ gir alternerende indre vinkel-teoremet at $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{AB}$. Bruk så linjalpostulatet til å finne et punkt E på $\overleftrightarrow{CD}$ slik at $E * C * D$. Siden $\overleftrightarrow{EC} = \overleftrightarrow{CD}$, vet vi at $\overleftrightarrow{EC} \parallel \overleftrightarrow{AB}$. Dermed gir motsatsen til alternerende indre vinkel-teoremet (teorem 4.7.1) at $\mu(\angle ACE) = \mu(\angle CAB)$.
Til nå har vi vist at $\mu(\angle BCD) = \mu(\angle ABC)$ og $\mu(\angle ACE) = \mu(\angle CAB)$. For å vise at

$$\mu(\angle ABC) + \mu(\angle CAB) + \mu(\angle ACB) = 180°,$$

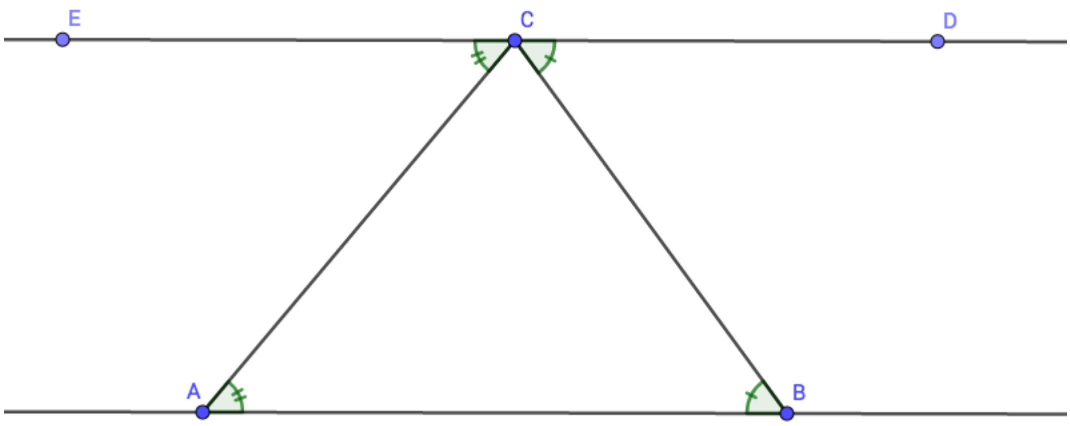
er det derfor nok å vise at

$$\mu(\angle BCD) + \mu(\angle ACE) + \mu(\angle ACB) = 180°.$$

Men denne siste ligningen følger av å bruke lineært par-teoremet: av lineært parteoremet er $\mu(\angle ACE) + \mu(\angle ACD) = 180°$. Av del 4 av gradskivepostulatet er også $\mu(\angle ACD) = \mu(\angle ACB) + \mu(\angle BCD)$, slik at vi til sammen har at

$$\begin{aligned} 180° = \mu(\angle ACE) + \mu(\angle ACD) &= \mu(\angle ACE) + \mu(\angle ACB) + \mu(\angle BCD) \\ &= \mu(\angle ABC) + \mu(\angle CAB) + \mu(\angle ACB), \end{aligned}$$

der vi i siste ligning har brukt at at $\mu(\angle BCD) = \mu(\angle ABC)$ og $\mu(\angle ACE) = \mu(\angle CAB)$. Dermed har vi vist resultatet.



Figur 6: Figur til oppgave 4.7 6. Vi finner D slik at vinklene med ett merke er like, og bruker det euklidske parallellpostulat til å vise at vinklene med to merker er like. Dermed reduserer vi problemet til å vise at summen av vinkelmålet av de tre vinklene i C er 180°, og da kan vi bruke lineært par-teoremet til å fullføre beviset.