Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

MA2401 Geometri
Vår 2018

Løsningsforslag — Øving 3

3.5 2 La l være ei linje, A et punkt på l og B et annet punkt på l. Vi skal vise at det finnes nøyaktig én linje m med $A \in m$ slik at $l \perp m$. La H_1 være et av halvplanene definert av linja l. Av del 3 av gradskivepostulatet finnes en unik stråle $\overrightarrow{AC}$ slik at $C \in H_1$ og $\mu(\angle BAC) = 90$. Hvis vi velger $m = \overleftrightarrow{AC}$, har vi at $A \in m$ og $\mu(\angle BAC) = 90$ (altså at $m \perp l$).

At linja m er unik følger av unikhetsdelen av del 3 av gradskivepostulatet. Dersom m' er en annen linje som tilfredsstiller $A \in m'$ og $l \perp m'$, må m' inneholde et punkt $C' \in H_1$ slik at $\mu(\angle BAC') = 90$. Unikhetsdelen av del 3 av gradskivepostulatet gir da at $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC'}$, siden begge disse strålene danner en vinkel på 90 grader sammen med $\overrightarrow{AB}$. Men da har vi også

$$m = \overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{AC'} = m'.$$

3.5 3 La A og B være to ulike punkt. Vi må vise at det finnes ei unik linje m slik at midtpunktet M av $\overline{AB}$ ligger på m og $\overleftrightarrow{AB} \perp m$. Midtpunktet M finnes og er unikt av teorem 3.2.22. La så m være den unike linja gjennom M slik at $\overleftrightarrow{AB} \perp m$ – denne linja finnes av forrige oppgave. Denne linja tilfredsstiller alle kravene våre, og den er unik siden midtpunktet M er unikt og linja m gjennom M slik at $\overleftrightarrow{AB} \perp m$ er unik av forrige oppgave.

3.5 7 La ΔABC være en trekant og D etv punkt i det indre av $\angle CAB$. Vi må vise at det finnes et punkt G slik at G ligger på $\overrightarrow{AD}$ og på $\overline{BC}$.

Kontinuitetsaksiomet:

La oss først forklare raskt hva kontinuitetsaksiomet forteller oss i denne situasjonen (hvis du har stålkontroll på kontinuitetsaksiomet kan du hoppe over denne delen). La $d = BC$, altså avstanden fra B til C. Fra linjalpostulatet får vi en én-til-én-korrespondanse mellom punktene i $[0, d]$ og punktene i $\overline{BC}$ slik at C svarer til 0 og B svarer til d. For $x \in [0, d]$ lar vi D_x være punktet i $\overline{BC}$ som svarer til x, altså er D_x punktet på $\overline{BC}$ slik at $CD_x = x$. Vi kan nå definere en funksjon $f : [0, d] \to \mathbb{R}$ ved

$$f(x) = \mu(\angle CAD_x).$$

Merk at $f(0) = 0$ og $f(d) = \mu(\angle CAB)$, siden $C = D_0$ og $B = D_d$ av konstruksjonen vår. Kontinuitetsaksiomet sier at denne funksjonen er kontinuerlig. Se også figuren under.

Tilbake til oppgaven:

Vi bruker dette til å vise krysstangteoremet. Siden D er et punkt i det indre av $\angle CAB$, er $0 \leq \mu(\angle CAD) < \mu(\angle CAB)$ av del 4 av gradskivepostulatet (eventuelt

teorem 3.4.5). Vi kan nå bruke skjæringssetningen (intermediate value theorem): siden $f : [0, d] \to \mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon,

$$f(0) = 0 \qquad\qquad f(d) = \mu(\angle CAB),$$

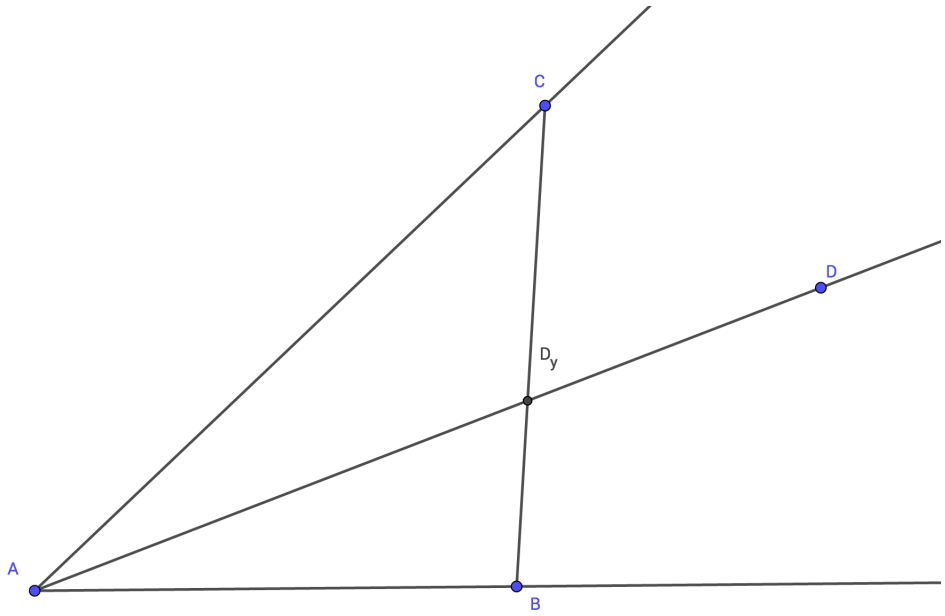
og $0 \leq \mu(\angle CAD) < \mu(\angle CAB)$, må det finnes et punkt $y \in [0, d]$ slik at $f(y) = \mu(\angle CAD)$.
Husk nå fra konstruksjonen av funksjonen f at punktet $y \in [0, d]$ svarer til et punkt $D_y \in \overline{BC}$ slik at $CD_y = y$, og at

$$f(y) = \mu(\angle CAD_y).$$

Vi fant y ved å kreve at $f(y) = \mu(\angle CAD)$, altså har vi fra forrige ligning at

$$\mu(\angle CAD) = \mu(\angle CAD_y).$$

Av unikhetsdelen av gradskrivepostulatet har vi dermed at $\overrightarrow{AD_y} = \overrightarrow{AD}$. Siden $D_y \in \overrightarrow{AD_y}$ følger det at $D_y \in \overrightarrow{AD}$, og dermed skjærer strålen $\overrightarrow{AD}$ linjestykket $\overline{BC}$ i punktet D_y. Med andre ord: vi kan velge $G = D_y$.



Figur 1: Konstruksjonen i oppgave 3.5 7. Punktene A, B, C, D er gitt. Vi bruker kontinuitetsaksiomet til å finne punktet D_y på $\overline{BC}$, slik at $\angle BAD_y \cong \angle BAD$. Unikhetsdelen i gradskivepostulatet gir da at $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD_y}$, så vi får at $\overrightarrow{AD}$ skjærer $\overline{BC}$ i punktet D_y.

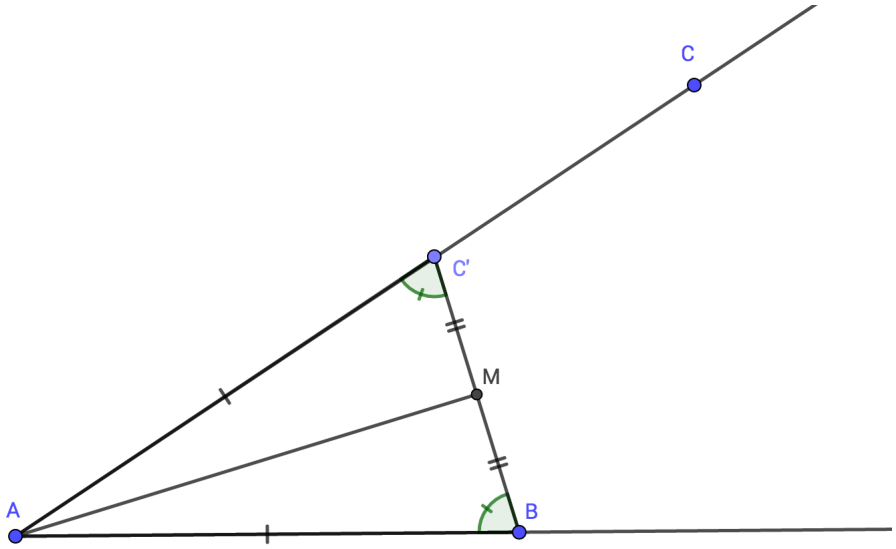
3.6 1 La A, B, C være tre punkt som ikke ligger på linje. Vi skal finne en stråle $\overrightarrow{AM}$ slik at M ligger i det indre av $\angle BAC$ og $\mu(\angle BAM) = \mu(\angle MAC)$.
Vi bruker først linjalpostulatet til å finne et punkt C' på $\overrightarrow{AC}$ slik at $AB = AC'$[1]. Bruk

[1]Mer presist bruker vi teorem 3.2.23. Læreboka bruker ofte linjalpostulatetsom en samlebetegnelse for alle resultater som følger av linjalpostulatet, slik som teorem 3.2.23.

så teorem 3.2.22 til å finne midtpunktet M på linjestykket $\overline{BC'}$. Rent intuitivt burde $\overrightarrow{AM}$ være vinkelhalvvereren vi søker, og vi skal nå bevise at dette faktisk stemmer. Trekanten $\Delta ABC'$ er likebeint per konstruksjon, og av teorem 3.6.5 følger det at $\angle BC'A \cong \angle C'BA$. Nå kan vi bruke SAS på trekantene ΔABM og $\Delta AC'M$ til å konkludere med at $\Delta ABM \cong \Delta AMC'$ – spesielt må $\mu(\angle BAM) = \mu(\angle MAC')$. Siden C' ligger på $\overrightarrow{AC}$ har vi også at $\angle MAC' = \angle MAC$, så vi kan konkludere med at

$$\mu(\angle BAM) = \mu(\angle MAC),$$

som viser at M er en vinkelhalverer [2] Unikhet kan vi vise på samme måte som i oppgave 3.4 1 ved hjelp av unikhetsdelen av gradskivepostulatet.

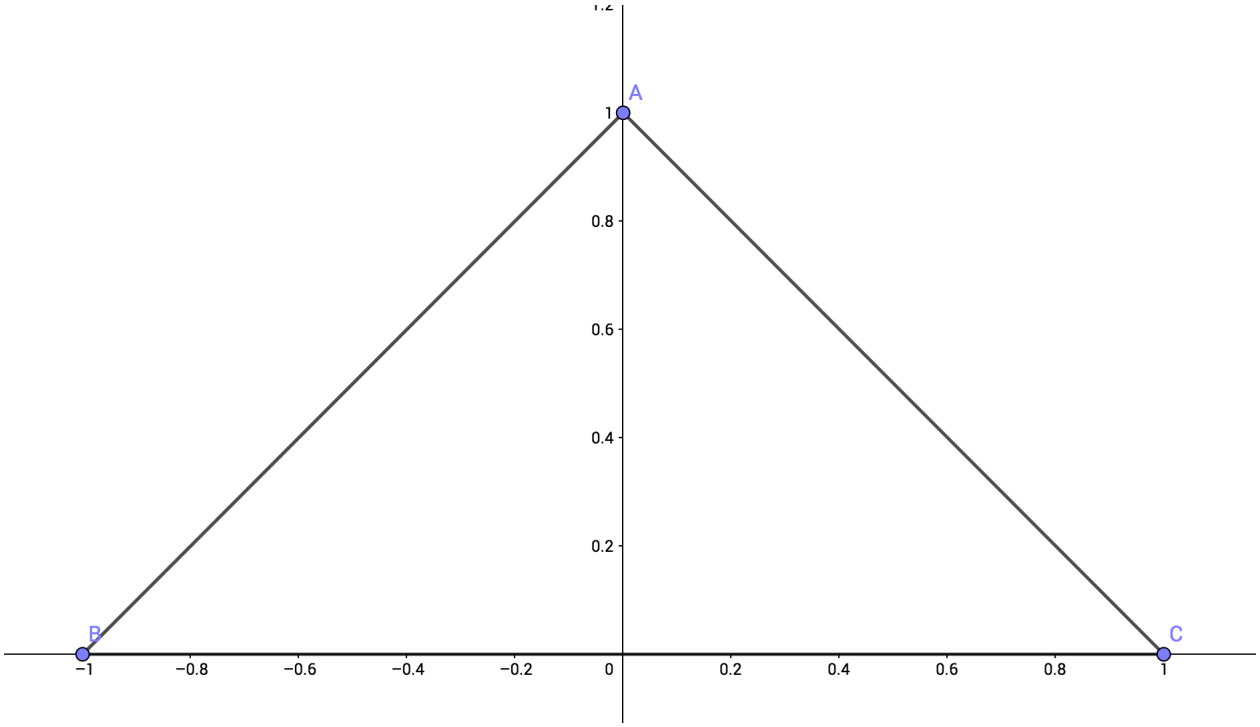


Figur 2: Figuren viser konstruksjonen i oppgave 3.6 1. Vi velger C' slik at $\overline{AC'} \cong \overline{AB}$. Dermed gir likebeint-trekant-teoremet at $\angle MC'A \cong \angle MBA$. Videre velges M til å være midtpunktet på $\overline{BC}$, og dermed kan vi bruke SAS til å konkludere med at $\angle BAM \cong \angle MAC$.

3.6 2 Vi skal vise ved eksempel at SAS ikke holder for $\mathbb{R}^2$ med kvadratmetrikken. Med andre ord må vi finne to trekanter ΔABC og ΔDEF slik at $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{EF}$ og $\angle BAC \cong \angle DEF$, men $\Delta ABC \ncong \Delta DEF$. Et slikt eksempel er vist i figurene 3 og 4 under. Vi har[3] at $AB = DE = 1$, $AC = EF = 1$ og både $\angle BAC$ og $\angle DEF$ er rette vinkler. Men $BC = 2$ og $EF = 1$, så vi kan ikke ha $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

3.7 2 **a)** Eksistenspostulatet (aksiom 3.1.1) sier at det finnes minst to punkt. Insidenspostulatet (aksiom 3.1.3) sier at to punkt alltid bestemmer ei unik linje. Sammen impliserer disse aksiomene at vi har minst ei linje, siden vi har (minst) to punkt, og disse punktene bestemmer ei linje.

[2] Vi har at M ligger i det indre av $\angle BAC = \angle BAC'$ fra teorem 3.3.10.
[3] Husk at vi måler avstander i kvadratmetrikken!



Figur 3: Oppgave 3.6 2.

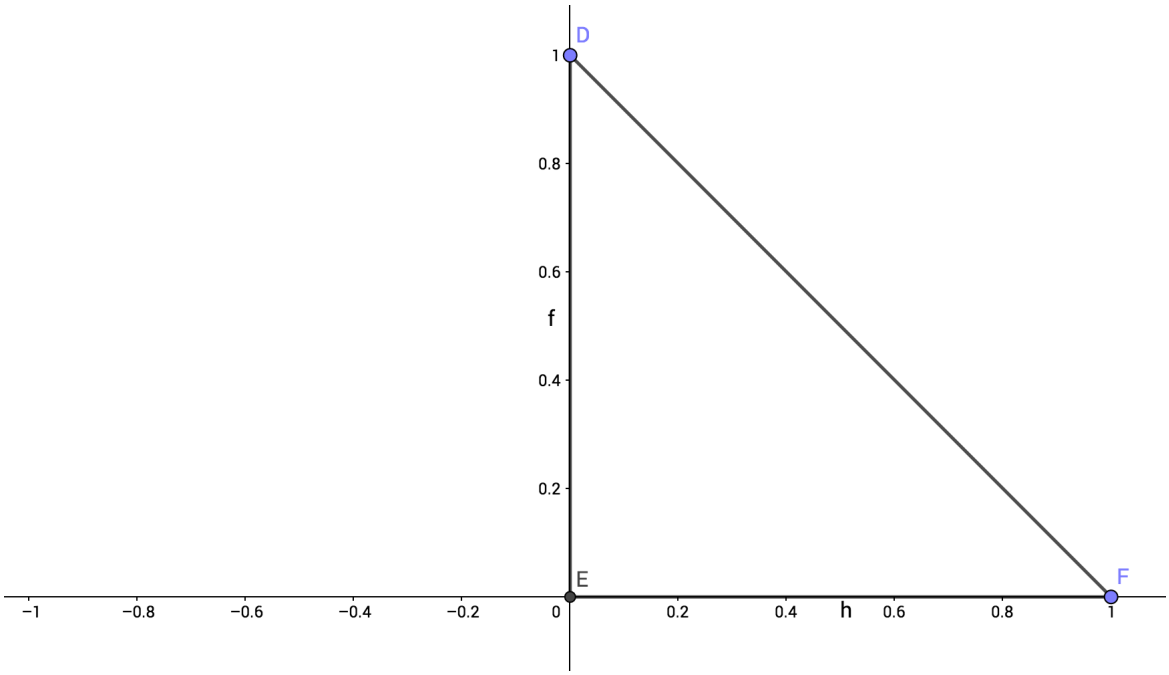
b) Av eksistenspostulatet kan vi finne to punkt A og B. Av planseparasjonspostulatet deler linja $\overleftrightarrow{AB}$ punktene utenfor $\overleftrightarrow{AB}$ i to disjunkte, ikke-tomme halvplan H_1 og H_2. Siden H_1 ikke er tom, finnes et punkt C i H_1. Da H_1 av planseparasjonspostulatet består av punkt som ikke ligger på $\overleftrightarrow{AB}$, kan ikke C ligge på $\overleftrightarrow{AB}$. Dermed er A, B og C ikke kolineære.

c) Av første deloppgave finnes ei linje l. Av linjalpostulatet finnes en koordinatfunksjon $f : l \to \mathbb{R}$. Siden f er en én-til-én-korrespondanse mellom l og den uendelige mengden $\mathbb{R}$, må også l ha uendelig mange elementer.

d) Vi vet fra deloppgave **a)** at det finnes ei linje l, og planseparasjonspostulatet gir, som i oppgave **b)**, at det finnes et punkt P som ikke ligger på l. Hvis A er et punkt på l, bestemmer A og P ei linje $\overleftrightarrow{AP}$.
Påstand: Hvis A og B er to ulike punkt på l, vil $\overleftrightarrow{AP} \neq \overleftrightarrow{BP}$. La oss vise dette. Dersom $\overleftrightarrow{AP} = \overleftrightarrow{BP}$ ligger både A og B på $\overleftrightarrow{AP}$. Men vi vet også at A og B ligger på l, og indidenspostulatet sier at A og B bestemmer ei *unik* linje. Derfor må $\overleftrightarrow{AP} = l$, noe som spesielt betyr at $P \in l$ – en motsigelse til vår antagelse om at $P \notin l$.
Derfor bestemmer alle punkt $A \in l$ ei linje $\overleftrightarrow{AP}$, og for ulike punkt $A \in l$ får vi ulike linjer $\overleftrightarrow{AP}$. Siden vi har vist at l må inneholde uendelig mange punkt, får vi dermed uendelig mange linjer $\overleftrightarrow{AP}$ når vi lar A være ulike punkt på l. Se også figur 5.

e) Vi må vise at aksiomene i kapittel 3 impliserer insidensaksiomene. Insidensaksiomene er at

1. For alle par av ulike punkt A, B finnes ei unik linje l som inneholder både A og B.

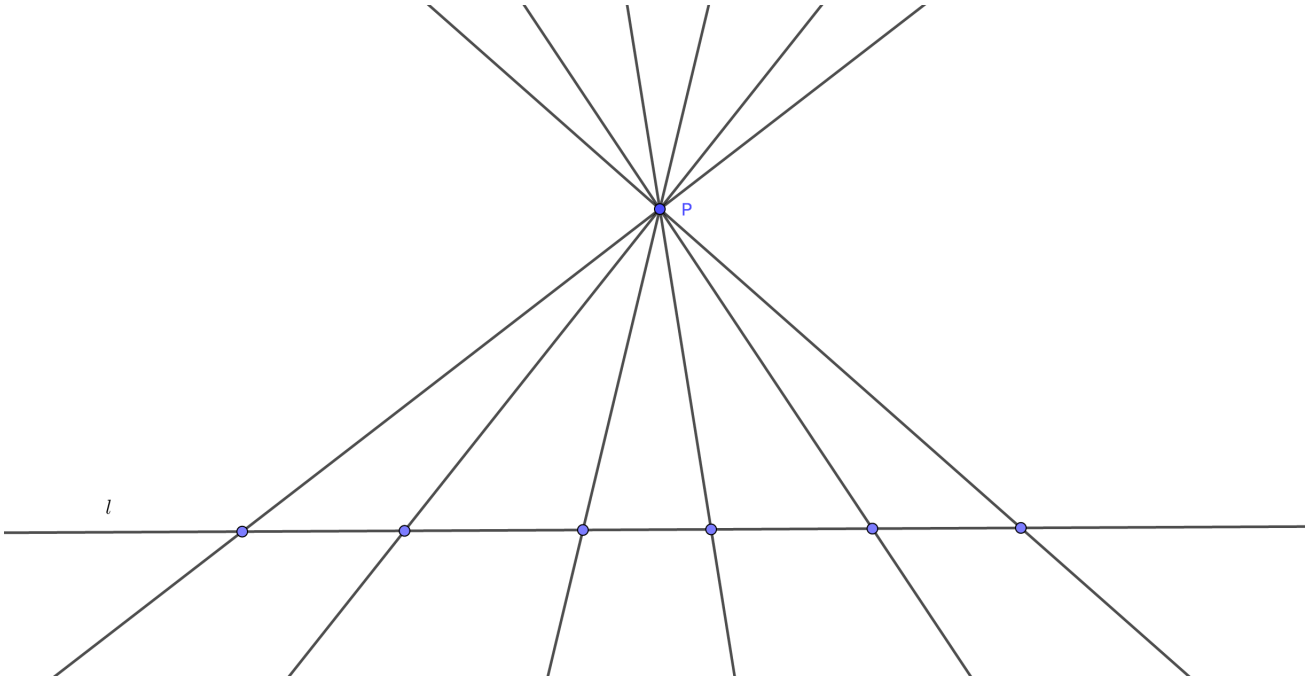


Figur 4: Oppgave 3.6 2.

2. For alle linjer l finnes minst to ulike punkt P og Q slik at P og Q ligger på l.
3. Det finnes tre punkt som ikke ligger på linje.

Insidensaksiom 1 er nettopp insidensaksiomet i kapittel 3. Insidensaksiom 2 følger fra linjalpostulatet i nøytral geometri – i deloppgave **c)** viste vi faktisk at alle linjer må inneholde uendelig mange punkt i nøytral geometri. At insidensaksiom 3 holder i nøytral geometri viste vi i deloppgave **b)**. I enhver modell for nøytral geometri må aksiomene for nøytral geometri være sanne, og siden insidensaksiomene følger av aksiomene i nøytral geometri må også aksiomene i insidensgeometri være sanne i en slik modell.

f) Et teorem i insidensgeometri er et utsagn som kan deduseres logisk fra insidensaksiomene. Siden insidensaksiomene kan deduseres fra aksiomene i nøytral geometri, kan vi også dedusere alle teorem i insidensgeometri fra aksiomene i nøytral geometri. Derfor er alle teorem i insidensgeometri også teorem i nøytral geometri.



Figur 5: Figuren viser hvordan vi finner uendelig mange linjer med utgangspunkt i punktet P og den horisontale linja l. For hvert punkt på l får vi ei linje.