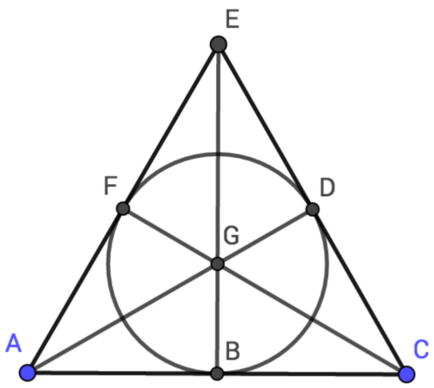
Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

MA2401 Geometri
Vår 2017

Løsningsforslag — Øving 1

$\boxed{\text{2.4 7}}$ I Fanos geometri (se side 18 i læreboka) er punktene gitt ved symbolene A, B, C, D, E, F, G og linjene er de 7 mengdene $\{A, B, C\}, \{C, D, E\}, \{E, F, A\}, \{A, B, C\}, \{A, G, D\}, \{C, G, F\}, \{B, G, E\}$ og $\{B, D, F\}$. En fin visualisering av denne geometrien er vist i figur 1. Fanos geome-



Figur 1: Fanos geometri

tri tilfredsstiller det *elliptiske* parallellpostulatet: for enhver linje l og punkt P som ikke ligger på l, finnes ingen linje m slik at P ligger på m og $m \parallel l$. Årsaken er ganske enkelt at det ikke finnes noen parallelle linjer i geometrien – to linjer har alltid et felles punkt.

$\boxed{\text{2.4 10}}$ Anta at vi har en modell for insidensgeometri. Av insidensaksiom 3 må modellen ha minst tre punkt. Hvis vi plukker to av disse punktene, kall dem A og B, ligger disse punktene på ei felles linje l av insidensaksiom 1. Siden vi antar at alle linjer har tre punkt, må l inneholde ett siste punkt som vi kaller C.

Vi har altså ei linje l med punktene A, B og C. Av insidensaksiom 3 må det finnes et punkt D som *ikke* ligger på l. Av insidensaksiom 1 bestemmer punktene A og D ei unik linje m, som per antagelse må inneholde tre punkt. Vi vet at to av punktene er A og D – kall det siste punktet E [1]. På tilsvarende vis bestemmer B og D et nytt punkt F, og C og D bestemmer et nytt punkt G. Modellen må altså inneholde minst 7 punkt. I tillegg vet vi at Fanos geometri tilfredstiller både aksiomene for insidensgeometri og den ekstra antagelsen at alle linjer har tre punkt. Siden Fanos geometri har 7 punkt, er 7 det minste antall punkt for en slik modell.

[1] Vi kan ikke ha at $E = C$ eller $E = B$, for da ville m og l hatt to felles punkt og dermed vært like av insidensaksiom 1.

$\boxed{3.2\ 12}$ At $f : l \to \mathbb{R}$ er en koordinatfunksjon betyr at

1. $PQ = |f(P) - f(Q)|$ for alle punkt $P, Q \in l$.
2. f er *på*: for alle $x \in \mathbb{R}$ finnes et punkt $P \in l$ med $f(P) = x$.
3. f er én-til-én: dersom $f(P) = f(Q)$ for to punkt $P, Q \in l$, er $P = Q$.

De to siste punktene betyr at f er en én-til-én-korrespondanse – se læreboka side 370 for en oppfrisking av disse begrepene. I **a)** og **b)** antar vi at f er en koordinatfunksjon, og derfor tilfredsstiller disse tre betingelsene.

a) Funksjonen $-f$ er definert ved $(-f)(x) = -f(x)$. Vi sjekker de tre betingelsene:

1. $$|(-f)(P) - (-f)(Q)| = |-f(P) + f(Q)| = |f(P) - f(Q)| = PQ,$$
   der vi har brukt at f er en koordinatfunksjon i siste steg.
2. Siden f er på, finnes et punkt P slik at $f(P) = -x$. Da er det klart at $-f(P) = -(-x) = x$.
3. Dersom $-f(P) = -f(Q)$, er også $f(P) = f(Q)$, og siden f er én-til-én må da $P = Q$.

b) Vi sjekker betingelsene igjen:

1. $$|g(P) - g(Q)| = |f(P) + c - (f(Q) + c)| = |f(P) - f(Q)| = PQ,$$
   der vi har brukt at f er en koordinatfunksjon i siste steg.
2. Siden f er på, må det finnes $P \in l$ slik at $f(P) = x - c$. Da er $g(P) = f(P) + c = x - c + c = x$.
3. Dersom $g(P) = g(Q)$ må vi åpenbart ha at $f(P) = f(Q)$, siden $g(P) = f(P) + c$. Siden f er én-til-én må derfor $P = Q$.

c) Vi antar nå at både f og h er koordinatfunksjoner for l, altså at de tilfredsstiller de tre betingelsene over. For å vise at to koordinatfunksjoner er like, er det faktisk nok å vise at de er like i to punkt; la oss formulere dette som et lemma.

Lemma 1. *La f og h være to koordinatfunksjoner for ei linje l. Dersom $f(P) = h(P)$ og $f(Q) = h(Q)$ for to punkt $P \neq Q$, er $f(A) = h(A)$ for alle $A \in l$.*

Bevis. Vi antar, uten tap av generalitet, at $f(P) < f(Q)$. La $A \in l$ være et punkt på linja. Vi ønsker å vise at $f(A) = h(A)$, og deler beviset i tre tilfeller[2].

1. $P * A * Q$. Av teorem 3.2.17 har vi da at $f(P) < f(A) < f(Q)$, og av linjalpostulatet er
   $$AQ = |f(Q) - f(A)| = f(Q) - f(A),$$
   der vi har brukt $f(Q) > f(A)$ for å fjerne absoluttverditegnet. Ved å løse for $f(A)$ finner vi at
   $$f(A) = f(Q) - AQ.$$
   Helt tilsvarende får vi at
   $$AQ = h(Q) - h(A),$$

[2] At vi kan dele beviset i disse tre tilfellene følger av korollar 3.2.19, som sier at når tre punkt ligger på ei linje, så ligger et av dem mellom to andre.

og dermed at

$$h(A) = h(Q) - AQ = f(Q) - AQ = f(A).$$

I siste steg har vi brukt at $f(Q) = h(Q)$.

2. $P * Q * A$. Argumentet er i stor grad som første del. Av teorem 3.2.17 er $f(P) < f(Q) < f(A)$, og linjalpostulatet gir at $AQ = f(A) - f(Q)$, slik at $f(A) = AQ + f(Q)$. På tilsvarende vis finner vi at $h(A) = AQ + h(Q) = AQ + f(Q) = f(A)$.
3. $A * P * Q$. Bevises som de to første delene.

□

La oss vende tilbake til den opprinnelige oppgaven. Siden f er en koordinatfunksjon er den spesielt på, så vi kan finne P og Q på l slik at $f(P) = 0$ og $f(Q) = 1$. Merk at linjalpostulatet dermed gir at $PQ = f(Q) - f(P) = 1$. Resten av beviset deles i to tilfeller.

1. $h(P) < h(Q)$. Påstand[3]: $h(A) = f(A) + c$, der $c = h(P)$. Av vårt lemma er det nok å vise at $h(P) = f(P) + c$ og at $h(Q) = f(Q) + c$. Den første av disse likhetene er åpenbar:

$$f(P) + c = f(P) + h(P) = 0 + h(P) = h(P).$$

Merk at linjalpostulatet gir at $PQ = h(Q) - h(P)$ (her bruker vi at $h(Q) > h(P)$). Den andre likheten kan derfor også vises lett:

$$\begin{aligned} f(Q) + c = f(Q) + h(P) &= f(Q) + (h(Q) - PQ) \\ &= h(Q) + (f(Q) - PQ) \\ &= h(Q), \end{aligned}$$

der vi bruker at $f(Q) = 1 = PQ$.

2. $h(Q) < h(P)$. Påstand: $h(A) = -f(A) + c$, der $c = h(P)$. Beviset er i stor grad det samme som over. Vi sjekker lett at $h(P) = 0 + h(P) = -f(P) + c$ siden $f(P) = 0$. Siden $h(Q) < h(P)$ gir linjalpostulatet at $PQ = h(P) - h(Q)$, så vi kan utføre følgende utregning:

$$\begin{aligned} -f(Q) + c = -f(Q) + h(P) &= -f(Q) + (h(Q) + PQ) \\ &= h(Q) + (PQ - f(Q)) \\ &= h(Q), \end{aligned}$$

der vi har brukt at $PQ = 1 = f(Q)$.

3.2 22 Vi skal vise at dersom $\overline{AB} = \overline{CD}$, så må enten $A = C$ og $B = D$ eller $A = D$ og $B = C$. Merk først at $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{CD}$: siden $C, D \in \overline{CD} = \overline{AB} \subset \overleftrightarrow{AB}$ er $\overleftrightarrow{AB}$ den unike linja som både C og D ligger på, altså lik $\overleftrightarrow{CD}$.
La $f : \overleftrightarrow{AB} \to \mathbb{R}$ være en koordinatfunksjon for linja $\overleftrightarrow{AB}$ (som altså er lik $\overleftrightarrow{CD}$). Anta, uten tap av generalitet[4], at $f(A) < f(B)$ og $f(C) < f(D)$. Fra teorem 3.2.17 og

[3] Denne påstanden kommer kanskje litt plutselig. La oss vise hvordan vi kom frem til den. Vi skal vise at $h(A) = \pm f(A) + c$ for alle $A \in l$. La oss anta at denne likheten holder. Det er to naturlige spørsmål å stille: hva bestemmet fortegnet til $\pm f(A)$, og hva er konstanten c? Siden $f(P) = 0$, finner vi raskt at $h(P) = 0 + c$, altså at $c = h(P)$. Dermed er $h(A) = \pm f(A) + h(P)$. Hvis vi nå evaluerer denne likheten i $A = Q$, får vi at $h(Q) = \pm 1 + h(P)$. Med andre ord: dersom $h(Q) > h(P)$ er fortegnet positivt, og dersom $h(Q) < h(P)$ er fortegnet negativt.

[4] Dersom antagelsen ikke stemmer, kan vi bare bytte navn på A og B og på C og D.

definisjonen av linjestykke er

$$\overline{AB} = \{P : f(A) \le f(P) \le f(B)\}$$
$$\overline{CD} = \{P : f(C) \le f(P) \le f(D)\},$$

og vi antar at disse mengdene er like. Av den øverste likheten har vi at $f(A) \le f(P)$ for alle $P \in \overline{AB} = \overline{CD}$. Spesielt må vi ha $f(A) \le f(C)$. Men av den nederste likheten er $f(C) \le f(Q)$ for alle $Q \in \overline{CD} = \overline{AB}$, spesielt må vi ha $f(C) \le f(A)$. Dermed er $f(A) = f(C)$, og siden f er en koordinatfunksjon (spesielt er f én-til-én) er da $A = C$. På tilsvarende vis finner vi at $B = D$.
Merk: Muligheten for at $A = D$ og $B = C$ forsvant da vi antok $f(A) < f(B)$ og $f(C) < f(D)$.

3.2 24 d) Vi antar at A, B og C ligger på ei linje l. La $f : l \to \mathbb{R}$ være en koordinatfunksjon for l – en slik funksjon finnes av linjalpostulatet [5] Siden B ligger mellom A og C, har vi av teorem 3.2.17 at enten $f(A) < f(B) < f(C)$ eller $f(A) > f(B) > f(C)$. La oss anta at $f(A) < f(B) < f(C)$; resten av beviset vil være helt likt dersom $f(A) > f(B) > f(C)$. Av definisjonen av linjestykke (def 3.2.4) samt teorem 3.2.17 ser vi (som i forrige oppgave) at

$$\overline{AB} = \{P : f(A) \le f(P) \le f(B)\} \qquad \overline{BC} = \{P : f(B) \le f(P) \le f(C)\}.$$

Dersom $Q \in \overline{AB} \cap \overline{BC}$ må vi derfor ha

$$f(A) \le f(Q) \le f(B) \text{ og} \qquad\qquad f(B) \le f(Q) \le f(C),$$

spesielt må $f(B) \le f(Q) \le f(B)$, noe som bare er mulig dersom $f(Q) = f(B)$. Siden f er én-til-én må $Q = B$.

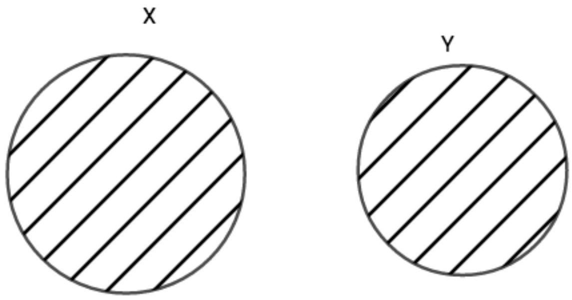
3.3 1 La X og Y være to konvekse mengder. Snittet (=intersection) av mengdene skriver vi $X \cap Y$, og $X \cap Y$ består per definisjon av alle punkt som ligger *både* i X og i Y.

Anta at A, B er to punkt i $X \cap Y$. Vi må vise at linjestykket $\overline{AB} \subset X \cap Y$. Siden $A \in X \cap Y$, må $A \in X$ og $A \in Y$ av definisjonen av $X \cap Y$. Tilsvarende må $B \in X$ og $B \in Y$. Siden X er konveks, må derfor $\overline{AB} \subset X$, og tilsvarende må $\overline{AB} \subset Y$ siden Y er konveks. Dette betyr av definisjonen av $X \cap Y$ at $\overline{AB} \subset X \cap Y$, som var det vi skulle vise.

I figur 6 har vi et eksempel på to konvekse mengder hvis union åpenbart ikke er konveks.

Denne tomme mengden $\emptyset$ er konveks. Definisjonen av konveksitet sier at for alle punkt A og B i $\emptyset$, er linjestykket $\overline{AB}$ inneholdt i $\emptyset$.Siden $\emptyset$ ikke har *noen* punkt, tilfredsstiller $\emptyset$ trivielt definisjonen over.

[5] Grunnen til at vi umiddelbart bruker en koordinatfunksjon, er at læreboka introduserer betweenness"ved hjelp av distansefunksjonen PQ. Det eneste vi egentlig vet om distansefunksjonen finner vi i linjalpostulatet: nemlig at $PQ = |f(P) - f(Q)|$ der f er en koordinatfunksjon. Så for å forstå betweenness"må vi forstå distanse, og for å forstå distanse må vi forstå koordinatfunksjoner.



Figur 2: Det er lett å se at de to diskene X og Y er konvekse, men union av dem er ikke konveks, siden linjestykket mellom et punkt i X og et punkt i Y ikke er inneholdt i unionen.

$\boxed{3.3\ 2}$ **Merk:** I denne oppgaven kommer vi til å bruke teorem 3.2.17 hyppig sammen med definisjoner av linjestykker og stråle, slik vi også har gjort i tidligere oppgaver. Spesielt kommer vi til å bruke at dersom f er en koordinatfunksjon for $\overleftrightarrow{AB}$ slik at $f(A) < f(B)$, så er

- $\overline{AB} = \{Q \in \overleftrightarrow{AB} : f(A) \leq f(Q) \leq f(B)\}$
- $\overrightarrow{AB} = \{Q \in \overleftrightarrow{AB} : f(A) \leq f(Q)\}$.

- Mengden $\{A\}$ er konveks: det eneste paret av punkt i $\{A\}$ er A, A, og per definisjon av linjestykke er $\overline{AA} = \{A, A\} \cup \{P : A * P * A\} = \{A\}$. Siden $\overline{AA} = \{A\}$ ligger i $\{A\}$, er mengden konveks.
- Mengden $\overline{AB}$ er konveks: La C, D være to punkt i $\overline{AB}$. Vi må vise at $\overline{CD} \subset \overline{AB}$. Punktene A, B, C, D ligger alle på linja $\overleftrightarrow{AB}$, og vi lar $f : \overleftrightarrow{AB} \to \mathbb{R}$ være en koordinatfunksjon for denne linja slik at $f(A) = 0$ og $f(B) > 0$ (her bruker vi teorem 3.2.16). Anta videre, uten tap av generalitet, at $f(C) < f(D)$.
  Anta $P \in \overline{CD}$. Siden
  $$\overline{CD} = \{Q \in \overleftrightarrow{CD} = \overleftrightarrow{AB} : f(C) \leq f(Q) \leq f(D)\}$$
  av merknaden øverst, vet vi at
  $$f(C) \leq f(P) \leq f(D).$$
  Siden
  $$\overline{AB} = \{Q \in \overleftrightarrow{AB} : f(A) \leq f(Q) \leq f(B)\}$$
  og $C, D \in \overline{AB}$, vet vi også at
  $$f(A) \leq f(C) \leq f(D) \leq f(B).$$
  Dermed får vi at
  $$f(A) \leq f(P) \leq f(B),$$
  og teorem 3.2.17 gir at $A * P * B$ og $P \in \overline{AB}$. Vi har vist at $P \in \overline{CD} \implies P \in \overline{AB}$, ergo $\overline{CD} \subset \overline{AB}$, som vi skulle vise.

- Mengden $\overrightarrow{AB}$ er konveks: Som over lar vi f være en koordinatfunksjon for $\overleftrightarrow{AB}$ med $f(A) = 0$ og $f(B) > 0$. Anta videre at $C, D \in \overrightarrow{AB}$ med $f(C) \leq f(D)$ – vi vil vise at $\overline{CD} \subset \overrightarrow{AB}$. Siden $C, D \in \overrightarrow{AB}$ vet vi at $f(C), f(D) \geq 0$.
  Dersom $P \in \overline{CD}$, vet vi at $f(C) \leq f(P) \leq f(D)$, siden
  $$\overline{CD} = \{Q \in \overleftrightarrow{CD} = \overleftrightarrow{AB} : f(C) \leq f(Q) \leq f(D)\}.$$
  Spesielt må vi ha at $f(P) \geq f(C) \geq 0$, og siden $\overrightarrow{AB} = \{Q \in \overleftrightarrow{AB} : 0 \leq f(Q)\}$ har vi at $P \in \overrightarrow{AB}$. Ergo $\overline{CD} \subset \overrightarrow{AB}$, som vi skulle vise.
- Mengden $\overleftrightarrow{AB}$ er konveks: Anta at vi har to punkt $C, D \in \overleftrightarrow{AB}$. Dersom $Q \in \overline{CD} = \{C, D\} \cup \{P : C * P * D\}$, må vi enten ha $Q = C$, $Q = D$ eller $C * Q * D$. I de to første tilfellene er åpenbart $Q \in \overleftrightarrow{AB}$. I det siste tilfellet, altså $C * Q * D$, må C, Q og D ligge på ei felles linje l siden dette er en del av definisjon 3.2.3 av å ligge mellom. Men vi vet også at C og D ligger på $\overleftrightarrow{AB}$, og siden to punkt ligger på ei *unik* linje av aksiom 3.1.3 må vi ha $l = \overleftrightarrow{AB}$. Vi vet at $Q \in l$, så vi må ha $Q \in \overleftrightarrow{AB}$.

$\boxed{\text{3.3 5}}$ Av plane separation axiom (aksiom 3.3.2) deler linja l resten av planet i to halvplan H_1 og H_2. Siden ingen av hjørnene A, B, C ligger på l, må A, B, C ligge i enten H_1 eller H_2. Vi har tre punkt A, B, C som ligger i to halvplan H_1 og H_2, det betyr at minst to av punktene må ligge i samme halvplan. Anta uten tap av generalitet at A og B ligger i samme halvplan H_1. Da H_1 er konveks, vil også $\overline{AB} \subset H_1$. Spesielt ligger ingen punkt i $\overline{AB}$ på linja l, som nettopp betyr at l ikke skjærer siden $\overline{AB}$ av trekanten.
Det er fullt mulig for ei linje å skjære ΔABC i alle tre sider. Linja $\overleftrightarrow{AB}$ vil skjære $\overline{AB}$ i A, $\overline{BC}$ i B og $\overline{AC}$ i A.