NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA2401/MA6401 Geometri: LF**

Faglig kontakt under eksamen: Christian Skau
Tlf: 979 65 057

Eksamensdato: 14. mai 2018
Eksamenstid (fra–til): 09:00-13:00
Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt: Casio fx-82ES PLUS, Citizen SR-270X, Hewlett Packard HP30S

Målform/språk: bokmål
Antall sider: 9
Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

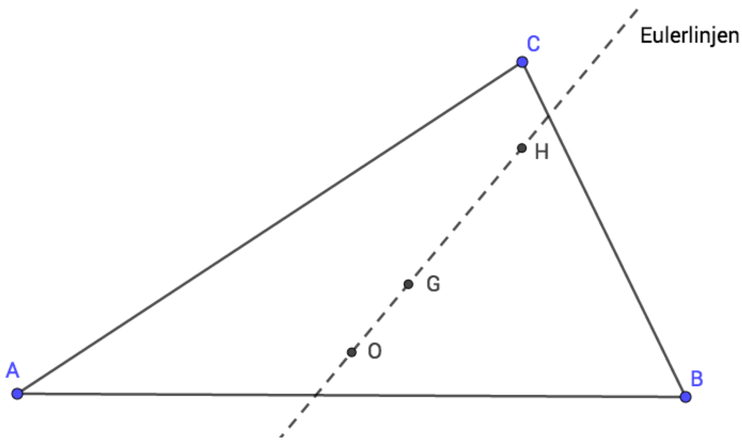
Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☐
sort/hvit ☐	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Merk! Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.

Oppgave 1 I 1765 oppdaget Euler et teorem vedrørende trekanter innen euklidsk geometri som Euklid hadde oversett. I den matematiske litteraturen er termen "Eulerlinjen" knyttet til denne oppdagelsen. Gi en kortfattet beskrivelse (uten bevis) av hva Euler oppdaget, gjerne ved hjelp av en figur.

Løsning:
Gitt trekanten ΔABC. La O være omsenteret (skjæringspunkt mellom midtnormalene til sidene i ΔABC), la G være sentroiden (skjæringspunktet mellom medianene i ΔABC) og la H være ortosenteret til ΔABC (skjæringspunktet mellom høydene i ΔABC). Da ligger O, G og H på en rett linje ("Eulerlinjen") og $GH = 2OG$ (eventuelt $OH = 3OG$). Se figur 1.



Figur 1: Figur som viser Eulerlinjen.

Oppgave 2 La $G = (\mathbb{P}, \mathbb{L})$ være en hyberbolsk geometri. Hvilke av følgende utsagn er korrekte? (Du trenger ikke begrunne svarene.)

(a) Ingen trekanter kan omskrives av en sirkel.

(b) Det finnes trekanter som ikke tillater en innskreven sirkel.

(c) Dersom to trekanter er formlike, så er de kongruente.

(d) Dersom ℓ, m og n er tre distinkte linjer slik at $l \parallel m$ og $m \parallel n$, så vil $l \parallel n$.

Løsning

(a) **Ikke korrekt.**

(b) **Ikke korrekt.**

(c) **Korrekt.**

(d) **Ikke korrekt.**

I de følgende oppgavene, der $G = (\mathbb{P}, \mathbb{L})$ er en nøytral geometri, kan man fritt benytte etter behov følgende teoremer og resultater: lineært par-teoremet, tverrstangsteoremet, scalene-ulikheten, ytre-vinkel-teoremet, alternerende-indre-vinkel (AIV) teoremet og likebent-trekant-teoremet. Bruk gjerne figurer for å illustrere resonnementene i besvarelsene til oppgavene.

Oppgave 3 I denne oppgaven er $G = (\mathbb{P}, \mathbb{L})$ en nøytral geometri.

a) La trekantene ΔABC og ΔDEF stå i følgende forhold til hverandre: $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\angle ACB \cong \angle DFE$, $\angle ABC \cong \angle DEF$. Vis at $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

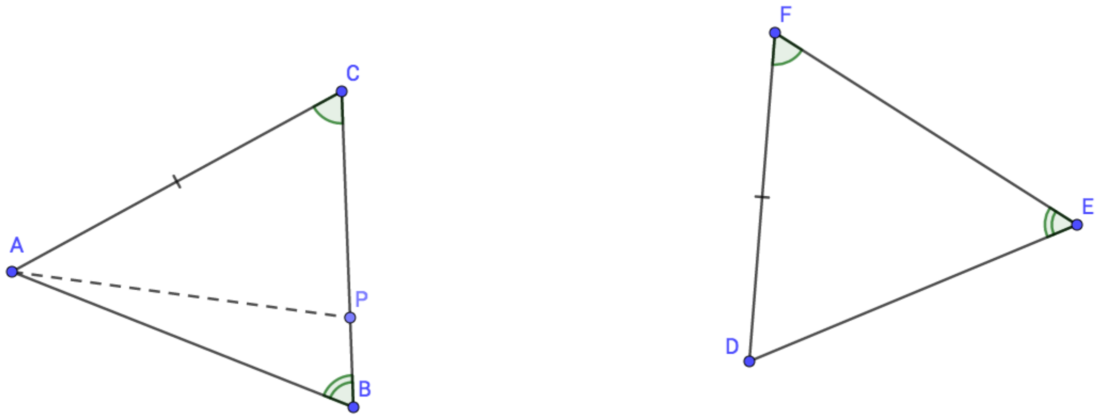
b) La $\ell \in \mathbb{L}$, $P \in \mathbb{P}$, $P \notin \ell$. Vis at det finnes en entydig linje $m \in \mathbb{L}$ slik at $P \in m$ og $m \perp \ell$.

c) La $\ell \in \mathbb{L}, P \in \mathbb{P}, P \notin \ell$. Vis at det finnes $n \in \mathbb{L}$ slik at $P \in n$ og $n \parallel \ell$.

Løsning:
a) Figur 2 viser hva som er antatt likt i trekantene ΔABC og ΔDEF. Dersom man kan vise at $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, så vil $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ følge fra SAS. Anta ad absurdum at $\overline{BC} \ncong \overline{EF}$. Uten tap av generalitet kan vi anta at $BC > EF$. Avsett et punkt P på $\overline{BC}$ slik at $CP = EF$ (linjalpostulatet) og trekk segmentet $\overline{AP}$ (se skravert segment i figuren). Da er $\Delta APC \cong \Delta DEF$ ifølge SAS, og altså er $\angle APC \cong \angle DEF$. Siden $\angle APC$ er ytre vinkel til ΔABP, så er

$$\mu(\angle APC) > \mu(\angle ABP) = \mu(\angle ABC) = \mu(\angle DEF).$$

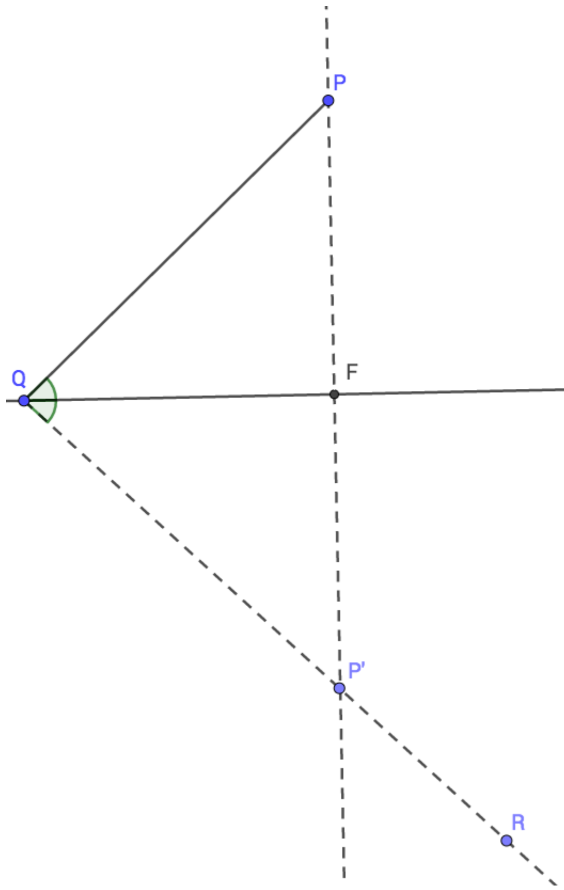
Dette er en motsigelse til $\angle APC \cong \angle DEF$, og altså må $\overline{BC} \cong \overline{EF}$. Følgelig er $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.



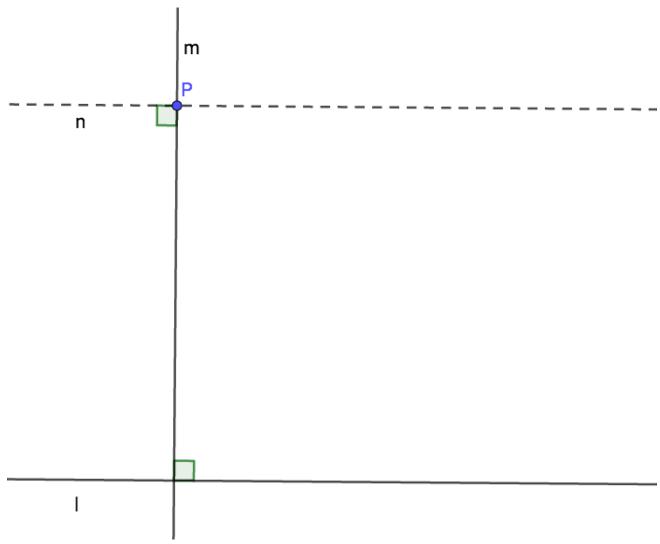
Figur 2: Figur til oppgave 3 a).

b) Vi viser først eksistensen av m. La Q og Q' være to distinkte punkter på ℓ som vist i figur 3. Det finnes et punkt R på motsatt side av ℓ enn P slik at $\angle Q'QP \cong \angle Q'QR$ – dette følger av gradskivepostulatet. Velg et punkt P' på $\overrightarrow{QR}$ slik at $\overline{QP} \cong \overline{QP'}$ (linjalpostulatet). La $m = \overleftrightarrow{PP'}$, og la $\{F\} = \overline{PP'} \cap \ell$ – altså er F skjæringspunktet mellom ℓ og $\overline{PP'}$, som finnes av planseparasjonspostulatet. Dersom $Q = F$, så er $m \perp \ell$ siden $\angle Q'FP$ og $\angle Q'FP'$ begge er 90° idet de danner et lineært par. Dersom $F \in \overrightarrow{QQ'}$ (slik som i figuren) så er $\Delta FQP \cong \Delta FQP'$ ifølge SAS, og altså $\angle QFP \cong \angle QFP'$. Men da er begge vinklene rette siden de danner et lineært par, og følgelig $m \perp \ell$. Tilsvarende resonnerer man dersom $F \in \overrightarrow{Q'Q}$.
Entydighet av m: Anta ad absurdum at det finnes to linjer m og m' slik at $P \in m$ og $P \in m'$, og slik at $m \perp \ell$ og $m' \perp \ell$ – se figur 4. La F og F' være de to fotpunktene, altså skjæringspunktene mellom ℓ og henholdsvis m og m'. Da har $\Delta PFF'$ en ytre vinkel ved F' som er rett, dvs 90°. Det strider mot ytre-vinkel-teoremet, siden $\angle PFF'$ er en rett vinkel. Altså er entydigheten av m bevist.

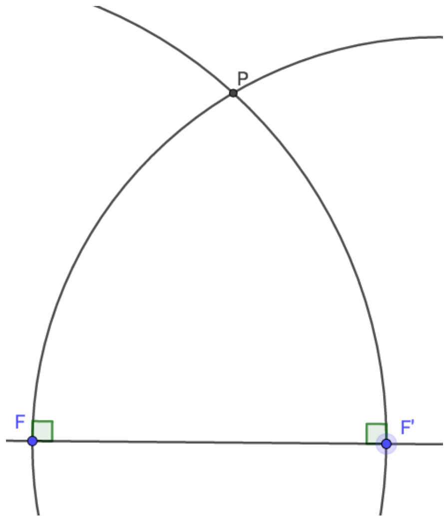
c) Nedfell en normal m fra P på ℓ, som vi så at var mulig i b). Konstruer en linje n gjennom P som er normal til m (gradskivepostulatet), som vist i figur 5. Da er $n \parallel \ell$ av AIV.



Figur 3: Figur til eksistensbeviset i oppgave 3 b).



Figur 5: Figur til oppgave 3 c).



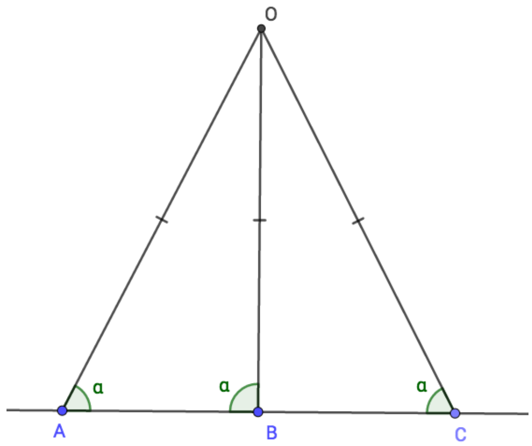
Figur 4: Figur til entydighetsbeviset i oppgave 3 b).

Oppgave 4

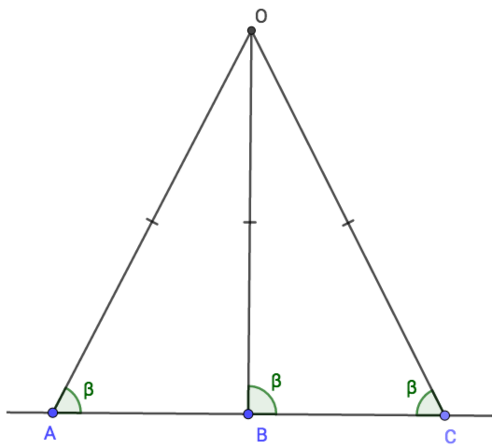
a) Vis at i nøytral geometri så vil en linje ℓ skjære en sirkel $\gamma = \mathcal{C}(O, r)$ i høyst to punkter.

b) Vis at dersom linjen ℓ er tangent til sirkelen $\gamma = \mathcal{C}(O, r)$ i punktet P så vil $\overleftrightarrow{OP} \perp \ell$.

Løsning:
a) La $\gamma = \mathcal{C}(O, r)$ være en sirkel, og la ℓ være en linje. Anta ad absurdum at ℓ skjærer γ i tre distinkte punkter A, B, C. Vi kan uten tap generalitet anta at $A * B * C$. Nå er $OA = OB = OC = r$. Ved likebent-trekant-teoremet anvendt to ganger så er de tre vinklene i figur 6 markert med α like. På samme vis gir to anvendelser av likebent-trekant-teoremet at de tre vinklene i figur 7 markert β er like. Dette medfører $\alpha = \beta$. Da må $\alpha = 90° = \beta$, siden α og β danner et lineært par. Dette strider mot at det finnes en entydig normal fra O på ℓ. Følgelig kan ℓ skjære γ i høyst to punkter.



Figur 6: Figur til oppgave 4a).



Figur 7: Figur til oppgave 4a).

b) Må vise at $\overleftrightarrow{OP} \perp \ell$. Nedfell en normal fra O til ℓ og kall fotpunktet Q som vist i figur 8. Det er nok å vise at $Q = P$. Anta ad absurdum $P \neq Q$. Velg et punkt R på ℓ slik at $P * Q * R$ og $\overline{PQ} \cong \overline{QR}$ (linjalpostulatet). Da er $\Delta OPQ \cong \Delta ORQ$ ved SAS. Da er $r = OP = OR$, og altså ligger R på γ. Dette er en motsigelse til at P er det eneste punktet som ligger på både ℓ og γ. Følgelig er $P = Q$, og derfor er $\ell \perp \overleftrightarrow{OP}$.

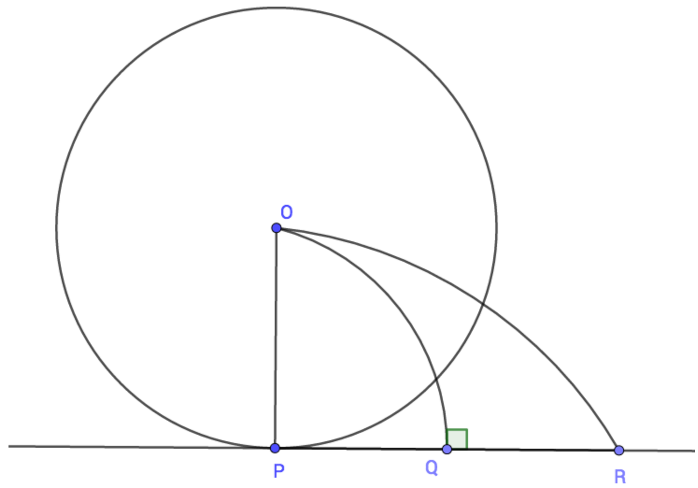
Oppgave 5 La $G = (\mathbb{P}, \mathbb{L})$ være en nøytral geometri. Denne oppgaven omhandler to utsagn som er sanne i euklidsk geometri, men ikke nødvendigvis i nøytral geometri, nemlig det euklidske parallellpostulat og Proclusaksiomet:

Det euklidske parallellpostulat: dersom $P \in \mathbb{P}, \ell \in \mathbb{L}, P \notin \ell$, så finnes det en <u>entydig</u> $m \in \mathbb{L}$ slik at $P \in m$ og $m \parallel \ell$.

Proclusaksiomet: dersom ℓ og ℓ' er parallelle linjer og t er en linje slik at $t \neq \ell$ og $t \cap \ell \neq \emptyset$, så vil $t \cap \ell' \neq \emptyset$.

a) Vis at det euklidske parallellpostulatet sammen med aksiomene for nøytral geometri medfører at Proclusaksiomet er oppfylt.

b) Motsatt, vis at Proclusaksiomet sammen med aksiomene for nøytral geometri medfører at det euklidske parallellpostulatet er oppfylt.



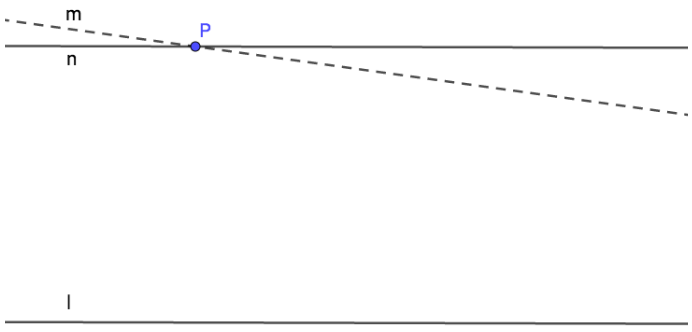
Figur 8: Figur til oppgave 4 b).

Løsning:
a) Anta ad absurdum at t skjærer ℓ i punktet P og at t ikke skjærer ℓ', dvs. at $t \parallel \ell'$. Da er ℓ og t to distinkte linjer gjennom P som er parallelle til ℓ'. Dette motsier det euklidske parallellpostulatet, og altså må $t \cap \ell' \neq \emptyset$.
b) Gitt linjen ℓ og et punkt P slik at $P \in \ell$. Ifølge oppgave 2c) eksisterer det en parallell n til ℓ som går gjennom P. Anta ad absurdum at det finnes en *annen* linje m som er parallell med ℓ og som går gjennom P – se figur 9. Ifølge Proclus-aksiomet så må m skjære ℓ siden $n \parallel \ell$ og $m \cap n \neq \emptyset$ (siden $P \in m \cap n$). Dette strider mot at m er antatt å være parallell med ℓ. Følgelig er n den eneste parallellen til ℓ som går gjennom P, og altså er det euklidske parallellpostulat oppfylt.

Oppgave 6 Anta at vinkelsummen til alle trekantene i en nøytral geometri har samme verdi, r. Vis at da må $r = 180°$.

Løsning: La ΔABC være en vilkårlig trekant, og la D være et punkt i det indre av segmentet $\overline{BC}$ som vist i figur 10. Ifølge hypotesen anvendt på trekantene $\Delta ABC, \Delta ABD$ og ΔADC får man:

$$(\alpha_1 + \alpha_2) + \beta + \gamma = r \tag{1}$$
$$\alpha_1 + \beta + \delta_1 = r \tag{2}$$
$$\alpha_2 + \delta_2 + \gamma = r. \tag{3}$$



Figur 9: Figur til oppgave 5 b).

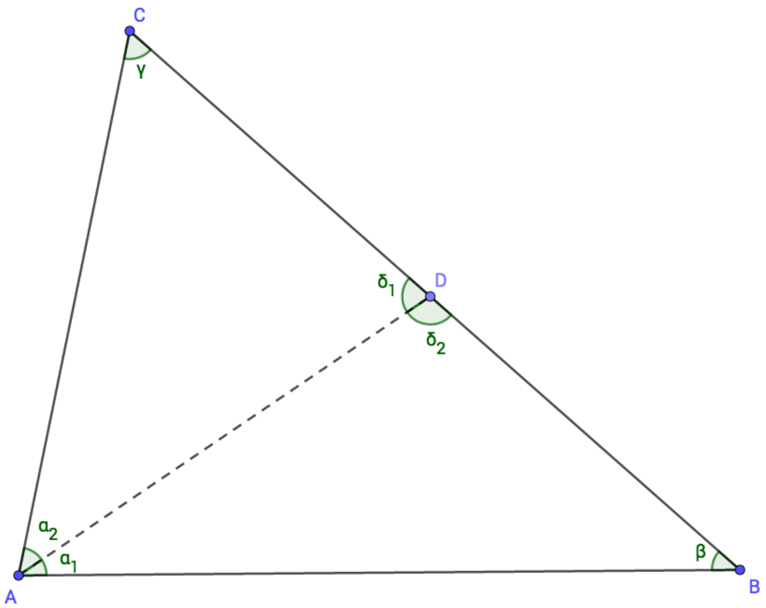
Nå er $\delta_1 + \delta_2 = 180°$ ifølge lineært par-teoremet. Adderer man (2) og (3), får man derfor

$$(\alpha_1 + \alpha_2) + \beta + \gamma + 180° = 2r. \tag{4}$$

Ved å kombinere (4) med (1), får man at

$$r + 180° = 2r,$$

altså må $r = 180°$.



Figur 10: Figur til oppgave 6.