



Norges teknisk–naturvitenskapelige
universitet
Institutt for matematiske fag

Morleys teorem, Eulerlinja og nipunktsirkelen

Notat

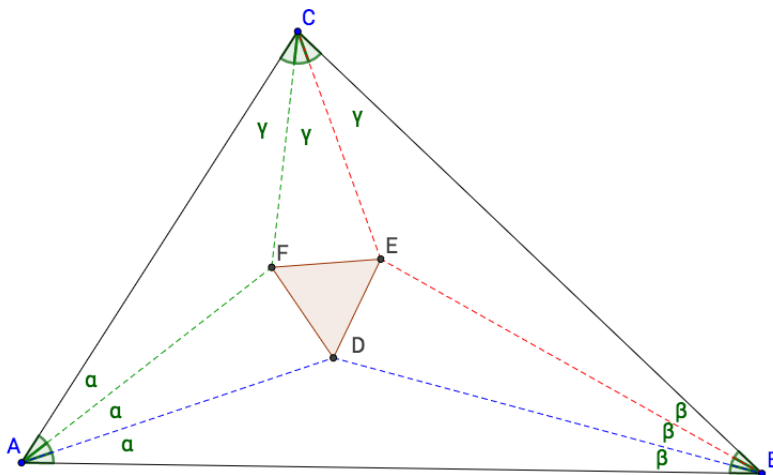
Notat til MA2401 Geometri: Morleys teorem, Eulerlinja og nipunktsirkelen

I dette notatet viser vi noen nyere resultater innen euklidsk geometri. Notatet erstatter kapittel 5.6 i læreboka, altså G. Venemas *Foundation of Geometry*, hvor flere av disse resultatene står uten bevis. Når vi refererer til ulike hjelperesultater underveis, vil referansen alltid være til læreboka. Beviset vi gir for Morleys teorem ble først funnet av D.J. Newman, og bevisene for de andre resultatene er hentet fra H. Coxeters *Introduction to Geometry*. Notatet kan grovt deles inn i to deler: Morleys teorem og resten. Morleys teorem blir ikke brukt i resten av notatet. Etter beviset for Morleys teorem viser vi eksistens av tre punkter knyttet til enhver trekant, nemlig sentroiden, ortosenteret og omsenteret. Vi viser at disse tre punktene ligger *Eulerlinja*, og at det finnes en sirkel gjennom ni punkt på enhver trekant, den såkalte *nipunktsirkelen*.

Merknad. Vi kommer til å bruke de vanlige forkortelsene fra faget. AIVT er alternerende indre vinkel-teoremet (teorem 4.4.2), og MAIVT er det motsatte alternerende indre vinkel-teoremet (teorem 5.1.1).

1 Morleys teorem

Teorem (Morley, 1899). La $\triangle ABC$ være en trekant. Trekk, for hvert hjørne i $\triangle ABC$, de to strålene som deler vinkelen i tre like store deler. Merk tre av disse skjæringspunktene: skjæringspunktet mellom strålene som ligger nærmest \overline{AB} , mellom strålene nærmest \overline{BC} og mellom strålene nærmest \overline{AC} . Da utgjør disse tre skjæringspunktene hjørnene i en likesidet trekant.



Figur 1: Figur som viser Morleys teorem. De stiplede strålene er strålene som deler vinklene i trekanten i tre like store deler. Innholdet i teoremet er at den markerte trekanten er likesidet.

Merknad. Den litt kronglete formuleringen av teoremet skyldes at strålene i teoremet skjærer hverandre i til sammen 12 punkt, og vi må spesifisere hvilke av disse skjæringspunktene vi snakker om. Sannsynligvis er det lettere å forstå utsagnet ved å kikke på figuren.

Bevis. La $\triangle ABC$ være en gitt trekant. Beviset vi skal bruke har en uventet innfallsvinkel: det tar nemlig utgangspunkt i den likesidede trekanten vi skal bevise at finnes. Vi lar derfor $\triangle DEF$ være en likesidet trekant med sidelengde 1, se figur 2.

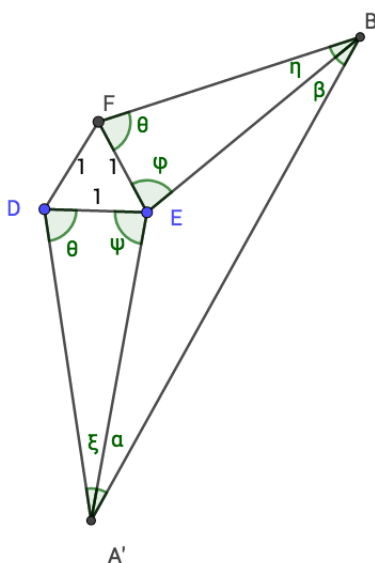


Figur 2: Utgangspunktet for beviset av Morleys teorem: trekanten $\triangle ABC$ som vi jobber med, og en likesidet trekant $\triangle DEF$ med sidelengde 1 som vi baserer beviset på.

Så konstruerer vi vinklene θ, ψ og φ som i figur 3, slik at

$$\begin{aligned}\mu(\theta) &= \frac{\mu(\angle C)}{3} + 60^\circ \\ \mu(\psi) &= \frac{\mu(\angle B)}{3} + 60^\circ \\ \mu(\varphi) &= \frac{\mu(\angle A)}{3} + 60^\circ,\end{aligned}$$

der $\angle A, \angle B$ og $\angle C$ er vinklene i trekanten $\triangle ABC$ som vi skal vise Morleys teorem for.



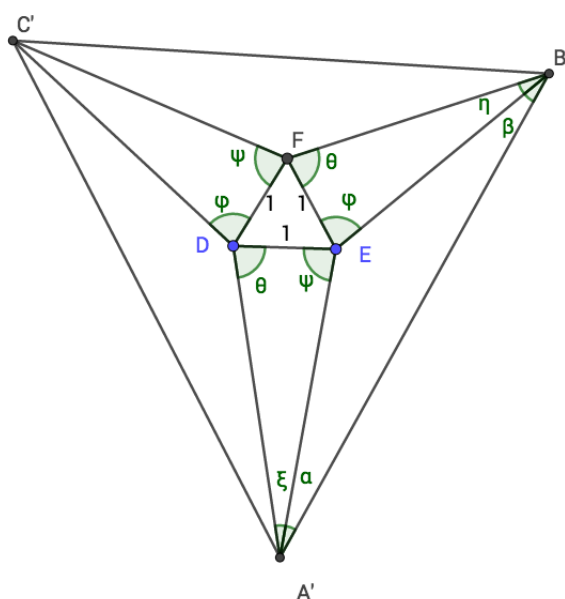
Figur 3: Bevis for Morleys teorem.

Denne konstruksjonen bruker naturligvis gradskivepostulatet. De to skjæringspunktene som oppstår kaller vi A' og B' , og vi trekker linjestykket mellom disse to punktene og innfører vinklene α og β – se figur 3. Før vi går videre bør vi begrunne at skjæringspunktene A' og B' faktisk finnes – det er åpenbart fra figuren, men vi ønsker å vise det med utgangspunkt i teorien vi har utviklet i faget. For å vise at B' finnes, legger vi merke til at

$$\begin{aligned}\mu(\theta) + \mu(\varphi) &= \frac{\mu(\angle C)}{3} + 60^\circ + \frac{\mu(\angle A)}{3} + 60^\circ \\ &= 120^\circ + \frac{\mu(\angle A) + \mu(\angle C)}{3} \\ &< 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ,\end{aligned}$$

der vi har brukt at $\mu(\angle A) + \mu(\angle C) < 180^\circ$, siden A og C er to hjørner i en trekant. Dermed må skjæringspunktet B' finnes av Euklids femte postulat, som er vårt teorem 5.1.2. På samme vis får vi at A' finnes.

Vi konstruerer to nye vinkler av størrelse φ og ψ som vist i figur 4, og innfører slik også punktet C' . Dermed har vi en ny trekant $\triangle A'B'C'$.



Figur 4: Bevis for Morleys teorem.

Dersom vi kan vise at $\mu(\alpha) = \mu(\xi) = \frac{\mu(\angle A)}{3}$, vil vi av symmetri ha vist at Morleys teorem holder for trekanten $\Delta A'B'C'$. Da har vi nemlig at konstruksjonen vår deler vinklene A', B', C' i tre like store deler, og hjørnene i den *likesidede* trekanten ΔDEF er skjæringspunktene til linjene som deler vinklene i tre like store deler.

Da vinkelsummen i trekanter er 180° finner vi at

$$\begin{aligned}\mu(\xi) &= 180^\circ - \mu(\psi) - \mu(\theta) \\ &= 180^\circ - 60^\circ - \frac{\mu(\angle B)}{3} - 60^\circ - \frac{\mu(\angle C)}{3} \\ &= 60^\circ - \frac{\mu(\angle B) + \mu(\angle C)}{3} \\ &= \frac{180^\circ - \mu(\angle B) - \mu(\angle C)}{3} = \frac{\mu(\angle A)}{3}.\end{aligned}$$

På helt samme vis finner vi at $\mu(\eta) = \frac{\mu(\angle B)}{3}$.

Vi anvender nå sinussetningen tre ganger, først på trekanten $\Delta A'ED$:

$$\frac{\sin A/3}{1} = \frac{\sin \theta}{A'E},$$

der vi har satt inn $\mu(\xi) = \mu(\angle A)/3$. Fra trekanten $\Delta B'EF$ får vi

$$\frac{\sin B/3}{1} = \frac{\sin \theta}{B'E},$$

der vi har satt inn $\mu(\eta) = \mu(\angle B)/3$, og fra $\Delta A'B'E$ får vi

$$\frac{\sin \alpha}{B'E} = \frac{\sin \beta}{A'E}.$$

Ved å eliminere $B'E$, $A'E$ og $\sin \theta$ fra de tre ligningene over, ender vi opp med

$$\frac{\sin A/3}{\sin B/3} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Denne siste ligningen impliserer faktisk at $\frac{\mu(\angle A)}{3} = \mu(\alpha)$ og $\frac{\mu(\angle B)}{3} = \mu(\beta)$ – se merknad etter beviset.

Vi har altså vist at $\mu(\alpha) = \mu(\angle A)/3 = \mu(\xi)$, slik at Morleys teorem holder for trekanten $\Delta A'B'C'$. Men konstruksjonen vår deler ikke bare $\angle A'$ i tre like store deler, den deler $\angle A'$ i tre deler av størrelse $\frac{\mu(A)}{3}$. Dermed må $\mu(\angle A) = \mu(\angle A')$, og av symmetri må $\mu(\angle B') = \mu(\angle B)$ og $\mu(\angle C') = \mu(\angle C)$. Altså har vi $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$. Av korollar 5.3.2 er derfor ΔABC en skalert versjon¹ av $\Delta A'B'C'$, og intuitivt vil trekanten ΔDEF forbli likesidet under en slik skalering. Dermed holder Morleys teorem også for trekanten ΔABC , som vi skulle vise².

□

Merknad. I beviset (og i forelesning) utelot vi å vise at

$$\frac{\sin A/3}{\sin B/3} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

impliserer $\frac{\mu(A)}{3} = \mu(\alpha)$ og $\frac{\mu(B)}{3} = \mu(\beta)$. Dette viser vi nå. Merk at notasjonen er litt uformell – vi kommer til å bruke samme notasjon for å referere til vinkelmål og selve vinkelen. Med andre ord dropper vi nå μ . Vi trenger følgende mellomregning:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 180^\circ - \angle A'EB' \\ &= 180^\circ - (360^\circ - \psi - \varphi - 60^\circ) \\ &= 180^\circ - \left(360^\circ - \left(\frac{B}{3} + 60^\circ \right) - \left(\frac{A}{3} + 60^\circ \right) - 60^\circ \right) \\ &= \frac{A}{3} + \frac{B}{3}. \end{aligned}$$

Vi ser at $\beta = \frac{A}{3} + \frac{B}{3} - \alpha$. Vi betrakter så ligningen

$$\frac{\sin x}{\sin A/3} = \frac{\sin(\frac{A}{3} + \frac{B}{3} - x)}{\sin B/3}, \quad (1)$$

for $x \in [0, A/3 + B/3]$. Vi ser at denne ligningen har en løsning når $x = \alpha$, for da er venstresiden $\frac{\sin \alpha}{\sin A/3}$ og høyresiden er $\frac{\sin \frac{A}{3} + \frac{B}{3} - \alpha}{\sin B/3} = \frac{\sin \beta}{\sin B/3}$, og vi vet at høyresiden og venstresiden er like i dette tilfellet siden $\frac{\sin A/3}{\sin B/3} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$. Merk at $\alpha \in [0, A/3 + B/3]$, siden $\alpha = \frac{A}{3} + \frac{B}{3} - \beta$ av mellomregningen.

For $x \in [0, A/3 + B/3]$ er venstresiden av ligning (1) en monotont voksende kontinuerlig funksjon, og høyresiden er en monotont avtagende kontinuerlig funksjon³. Av skjæringssetningen finnes det derfor en unik løsning av ligning (1) på intervallet $[0, A/3 + B/3]$, og denne unike løsningen har vi funnet at er $x = \alpha$, som av mellomregningen vår impliserer $\frac{A}{3} + \frac{B}{3} - x = \beta$. Samtidig er det lett å se at $x = A/3$ er en løsning av (1). Siden løsningen er unik og både $x = \alpha$ og $x = A/3$ er løsninger, følger det at $\alpha = A/3$ og $\beta = B/3$.

¹Det finnes altså en konstant r slik at lengden av sidene i ΔABC er r ganger lengden av sidene i $\Delta A'B'C'$.

²Dette siste steget er selvsagt ikke helt formelt, men det bør være en grei oppgave å gjøre argumentet formelt ved hjelp av resultatene fra faget.

³Her jukser vi litt. Vi antar at egenskaper ved sinusfunksjonen er kjent, som at den er kontinuerlig og voksende på intervallet $[0, 90^\circ]$.

2 Et nyttig resultat

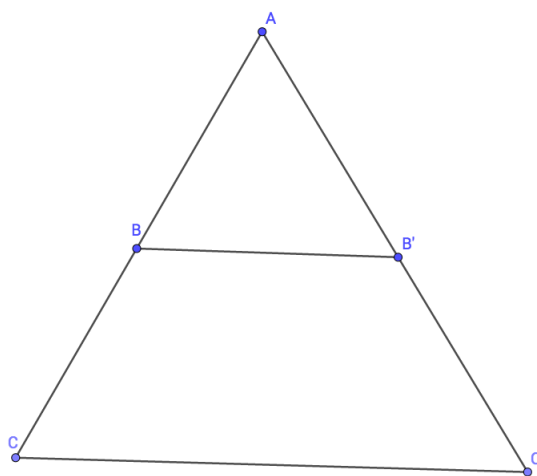
For å kunne vise resten av resultatene i dette notatet, trenger vi et teorem som følger lett fra AIVT og parallellprojeksjonsteoremet.

Teorem 2.1. La A, C, C' være tre ulike punkt, og la $B \in \overline{AC}$ og $B' \in \overline{AC'}$. Da er

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}$$

hvis og bare hvis

$$\overleftrightarrow{BB'} \parallel \overleftrightarrow{CC'}.$$



Figur 5: Figur til teorem 2.1

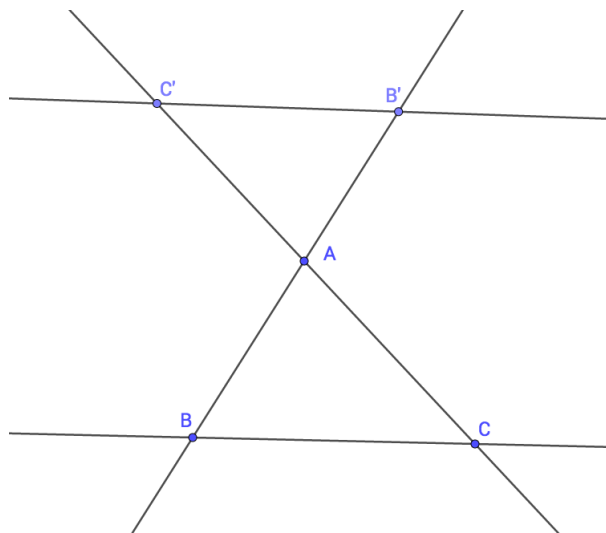
Bevis. Anta først at $\overleftrightarrow{BB'} \parallel \overleftrightarrow{CC'}$. Da følger det fra parallellprojeksjonsteoremet (teorem 5.2.1) at $\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}$.

Anta så at $\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}$. Siden $\triangle ACC'$ og $\triangle ABB'$ har vinkelen $\angle A$ felles, og $\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}$ gir teorem 5.3.3 at $\triangle ACC' \sim \triangle ABB'$. Spesielt er $\angle C'CA \cong \angle B'BA$, slik at AIVT gir at $\overleftrightarrow{BB'} \parallel \overleftrightarrow{CC'}$ – helt presist er det korollar 4.4.4 vi bruker. \square

Merknad. Vi kommer også til å bruke en liten variant av dette teoremet: Hvis $\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}$ i situasjonen vist i figur 6, er $\overleftrightarrow{BB'} \parallel \overleftrightarrow{CC'}$. Utsagnet bevises akkurat som forrige teorem, ved at $\triangle ABC \sim \triangle AB'C'$. Det eneste nye er at vi må bruke at $\angle BAC$ og $\angle B'AC'$ er toppvinkler.

3 Sentroiden til en trekant

Vi skal nå vise eksistens av tre punkt knyttet til enhver trekant. Det første punktet er *sentroiden*, og vi må først definere hva en median er.

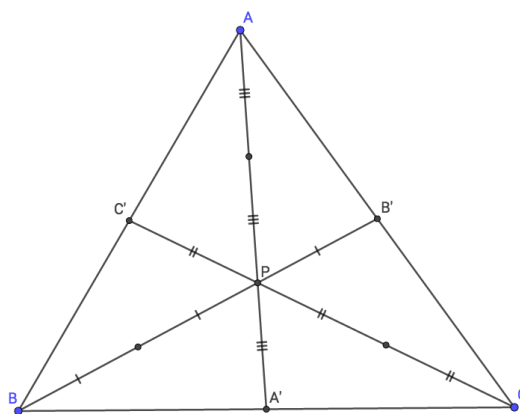


Figur 6

Definisjon 3.1. La $\triangle ABC$ være en trekant. De tre medianene til trekanten $\triangle ABC$ er linjene definert av et hjørne i $\triangle ABC$ og midtpunktet på motsatt side av trekanten.

For eksempel er linja \overleftrightarrow{AM} en median i $\triangle ABC$, der M er midtpunktet på \overline{BC} . Hovedteoremet i denne delen av notatet er at medianene skjærer hverandre i et punkt.

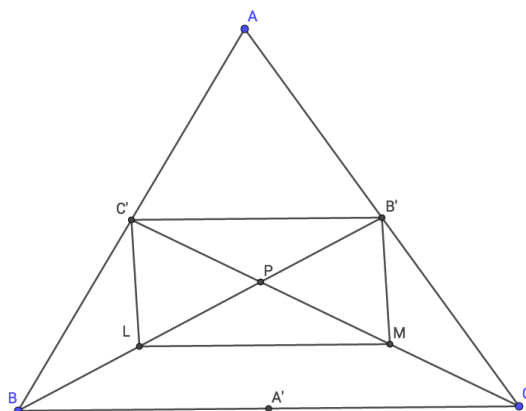
Teorem 3.1. De tre medianene til en trekant $\triangle ABC$ skjærer hverandre i et punkt P slik at $AP = 2A'P$, $BP = 2B'P$ og $CP = 2C'P$, der A', B', C' er midtpunktene på sidene av $\triangle ABC$. Skjæringspunktet P kalles sentroiden til trekanten.



Figur 7: Figur som viser at medianene til en trekant skjærer hverandre. Her er punktene A', B', C' midtpunktene på sidene av trekanten. Ulike linjestykker er merket for å vise at punktet P deler medianene i forholdet $\frac{2}{3}$.

Bevis. La $\triangle ABC$ være en trekant. Kall midtpunktet på \overline{BC} for A' , midtpunktet på \overline{AC} for B' og midtpunktet på \overline{AB} for C' . Vi skal vise at $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ og $\overleftrightarrow{CC'}$ skjærer hverandre i et punkt. La P være punktet hvor $\overleftrightarrow{BB'}$ og $\overleftrightarrow{CC'}$ skjærer hverandre, og la L og M være

midtpunktene på \overline{PB} og \overline{PC} . Oppsettet er vist i figur 8.



Figur 8: Figur til beviset for at medianene til en trekant skjærer hverandre. Første mål er å vise at $\square LMB'C'$ er et parallelogram.

Vi ønsker først å vise at $\square LMB'C'$ er et parallelogram. Siden C', B', M og L alle ble funnet som midtpunkt på linjestykker, har vi at

$$\frac{AC'}{AB} = \frac{AB'}{AC} = \frac{1}{2}$$

og at

$$\frac{PL}{PB} = \frac{PM}{PC} = \frac{1}{2}.$$

Fra teorem 2.1 får vi da at $\overrightarrow{B'C'} \parallel \overrightarrow{BC}$ og $\overrightarrow{LM} \parallel \overrightarrow{BC}$, og dermed at $\overrightarrow{B'C'} \parallel \overrightarrow{LM}$. Av oppgave 5.1.3 (øving 7) vil $\square LMB'C'$ nå være et parallelogram hvis $B'C' = LM$, så la oss vise dette. Siden $\overrightarrow{B'C'} \parallel \overrightarrow{BC}$ gir MAIVT at $\triangle AC'B' \sim \triangle ABC$, slik at teorem 5.3.1 gir at

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{AC'}{AB} = \frac{1}{2},$$

der vi har brukt at C' er midtpunktet på \overline{AB} . På samme vis finner vi at $\triangle BCP \sim \triangle LMP$ og bruker dette til å vise at

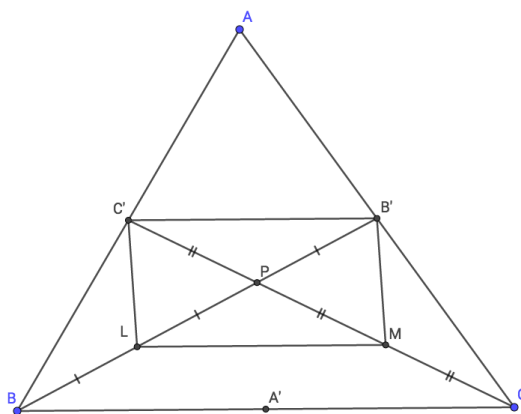
$$\frac{LM}{BC} = \frac{1}{2},$$

og spesielt må $LM = B'C'$ siden begge disse lengdene er $\frac{1}{2}BC$. Som vi diskuterte må $\square LMB'C'$ være et parallelogram.

Av teorem 5.1.10 skjærer diagonalene i et parallelogram hverandre på midtpunktene, altså er $LP = PB'$ og $MP = PC'$. Men vi definerte L og M som midtpunktene på henholdsvis \overline{BP} og \overline{CP} , dermed har vi faktisk

$$LP = PB' = BL$$

$$MP = PC' = CM.$$



Figur 9: Figur til beviset for at medianene til en trekant skjærer hverandre. Som vi ser er $CP = \frac{2}{3}CC'$ og $BP = \frac{2}{3}BB'$.

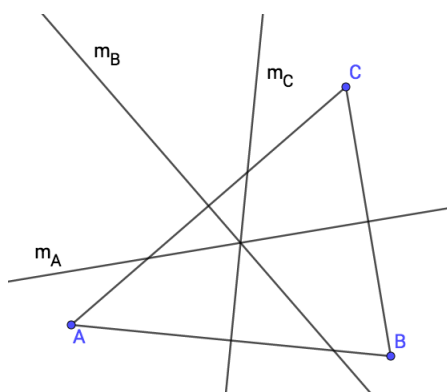
Som vi ser av figur 9 skjærer altså medianene $\overleftrightarrow{BB'}$ og $\overleftrightarrow{CC'}$ hverandre i et punkt P slik at $CP = \frac{2}{3}CC'$ og $BP = \frac{2}{3}BB'$. Vi kan selvfølgelig gjennomføre nøyaktig samme argument med medianene $\overleftrightarrow{CC'}$ og $\overleftrightarrow{AA'}$, og få at disse medianene skjærer hverandre i et punkt Q slik at $AQ = \frac{2}{3}AA'$ og $CQ = \frac{2}{3}CC'$. Men da er både Q og P punkt på $\overleftrightarrow{CC'}$ slik at $CP = CQ$, og dermed er $P = Q$ av linjalpostulatet. Dermed skjærer alle medianene hverandre i $P = Q$.

□

4 Omsenter

Vi innfører nå det andre punktet knyttet til enhver trekant, nemlig omsenteret.

Teorem. De tre midtnormalene til en trekant skjærer hverandre i et punkt. Skjæringspunktet til midtnormalene kalles omsenteret til trekanten.



Figur 10: Figur som viser at midtnormalene m_A, m_B, m_C til en trekant skjærer hverandre i et punkt. Vær oppmerksom på at figuren kan være villedende, da skjæringspunktet gjerne kan ligge utenfor trekanten.

Bevis. Øving 9. □

Navnet omsenter skyldes følgende teorem, som sier omsenteret er sentrum for en sirkel som inneholder alle hjørnene til en trekant. Dette blir det mer om i kapittel 8 i læreboka.

Korollar 4.0.1 (Omskrevne sirkel). *La ΔABC være en trekant. Da ligger A, B, C på en sirkel γ med sentrum i omsenteret til ΔABC . γ kalles den omskrevne sirkelen til ΔABC .*

Bevis. La H være omsenteret til ΔABC . Siden H ligger på midtnormalen til \overline{AB} , gir teorem 4.3.7 at $HA = HB$. Siden H ligger på midtnormalen til \overline{AC} , gir teorem 4.3.7 at $HA = HC$. Ergo er $HA = HB = HC$, som vil si at A, B, C ligger på sirkelen γ med sentrum H og radius HA . □

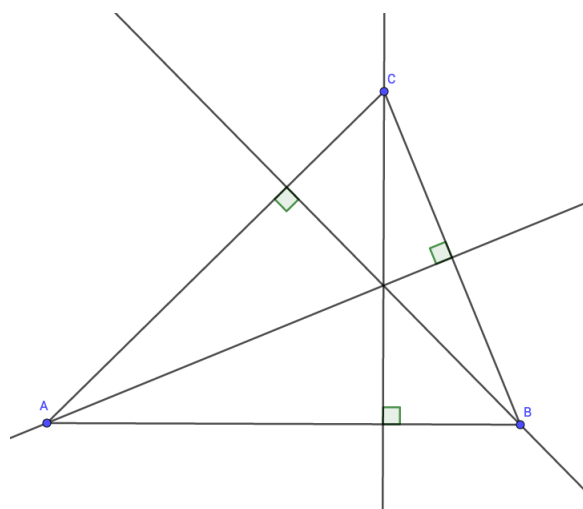
5 Ortosenter og Eulerlinja

Det tredje og siste punktet knyttet til enhver trekant er ortosenteret. Først må vi definere hva en høyde er.

Definisjon 5.1. *La ΔABC være en trekant. En høyde i en trekant er ei linje gjennom et hjørne i trekanten som står normalt på linja definert av de to andre hjørnene i trekanten. Punktet hvor en høyde gjennom et punkt skjærer linja definert av de to andre punktene kalles foten til høyden.*

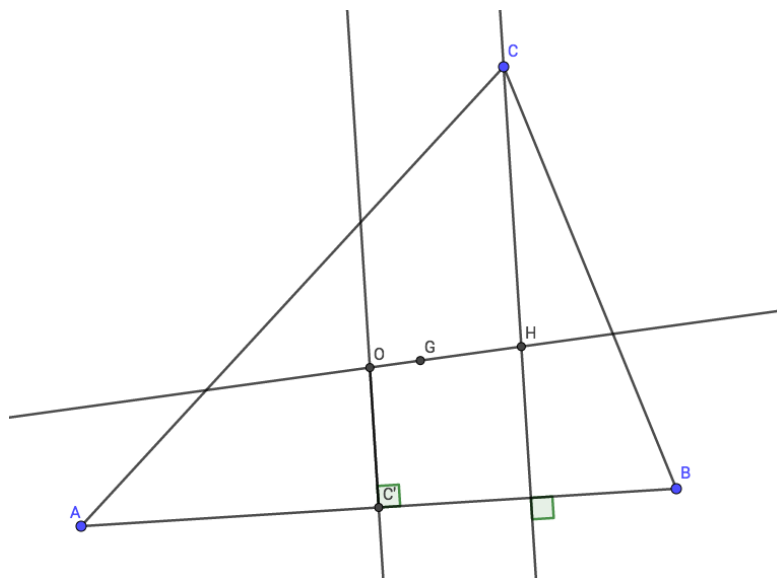
Akkurat som medianene og midtnormalene skjærer hverandre i et punkt, skjærer også høydene hverandre i punktet vi kaller ortosenteret.

Teorem. *De tre høydene i en trekant skjærer hverandre i et punkt. Skjæringspunktet til høydene kalles ortosenteret til trekanten.*



Figur 11: Figur som viser at høydene i en trekant skjærer hverandre i et punkt – ortosenteret. Merk at ortosenteret ikke nødvendigvis ligger inni trekanten, slik det gjør i denne figuren.

Bevis. La ΔABC være en trekant, la O være omsenteret til ΔABC og la G være sentroiden til ΔABC . Anta først at $O = G$. Vi så i øving 9 at ΔABC da er likesidet. I en likesidet trekant er midtnormal og høyde det samme, slik at også høydene i trekanten skjærer hverandre i punktet $O = G$.



Figur 12: Figur til beviset for at høydene i en trekant skjærer hverandre. Vi konstruerer et punkt H , og viser at H ligger på alle høydene til trekanten – altså skjærer høydene hverandre i H . Dette viser vi ved å vise at $\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB}$, slik at \overrightarrow{CH} er en høyde i trekanten, og tilsvarende for de andre hjørnene.

Anta så at $O \neq G$. Da definerer O og G ei linje \overleftrightarrow{OG} . Bruk linjalpostulatet til å finne et punkt $H \in \overleftrightarrow{OG}$ slik at $O * G * H$ og $OH = 3GO$ – se figur 12. Vi ønsker å vise at \overrightarrow{AH} , \overrightarrow{BH} og \overrightarrow{CH} er høydene i trekanten; merk at disse linjene skjærer hverandre i H . For å vise at disse linjene er høyer, må vi vise $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB}$.

Siden

$$3GO = OH = GO + GH,$$

må vi ha at $GH = 2GO$. Hvis vi lar C' være midtpunktet på \overline{AB} , vet vi fra teorem 3.1 at $GC = 2GC'$. Dermed har vi at

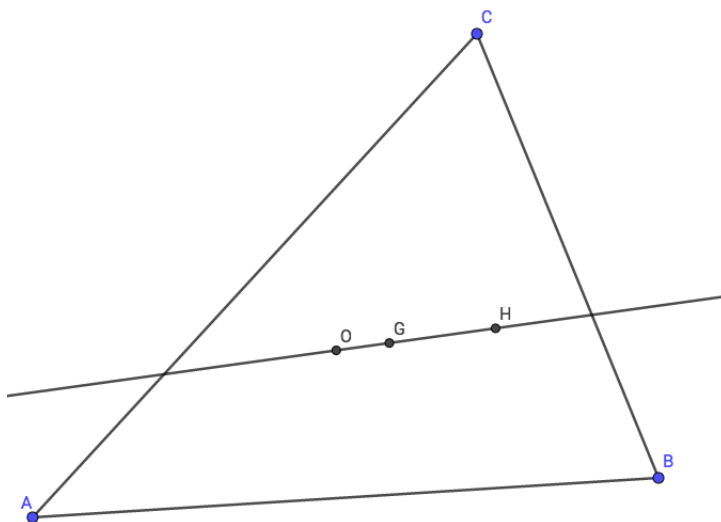
$$\frac{GH}{GO} = \frac{GC}{GC'},$$

slik at merknaden etter teorem 2.1 gir at $\overrightarrow{CH} \parallel \overrightarrow{OC'}$. Siden O er skjæringspunktet mellom midtnormalene og C' er midtpunktet på \overline{AB} , må $\overrightarrow{OC'}$ være midtnormalen til \overline{AB} , og spesielt må $\overrightarrow{OC'} \perp \overrightarrow{AB}$. Siden $\overrightarrow{CH} \parallel \overrightarrow{OC'}$ gir MAIVT at $\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB}$. På tilsvarende vis får vi $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$.

□

Fra beviset for at ortosenteret finnes, er det lett å se at omsenteret, ortosenteret og sentroiden ligger på ei linje. Ortosenteret ble tross alt funnet som et punkt på linja gjennom omsenteret og sentroiden. Dette ble først oppdaget av L. Euler, og linja bærer derfor hans navn.

Korollar 5.0.1 (Eulerlinja, Euler 1765). *Hvis $\triangle ABC$ er en trekant, ligger omsenteret, sentroiden og ortosenteret på ei linje. Denne linja kalles Eulerlinja til trekanten.*



Figur 13: Figur som viser Eulerlinja til en trekant. Her er O omsenteret, G sentroiden og H ortosenteret.

6 Nipunksirkelen

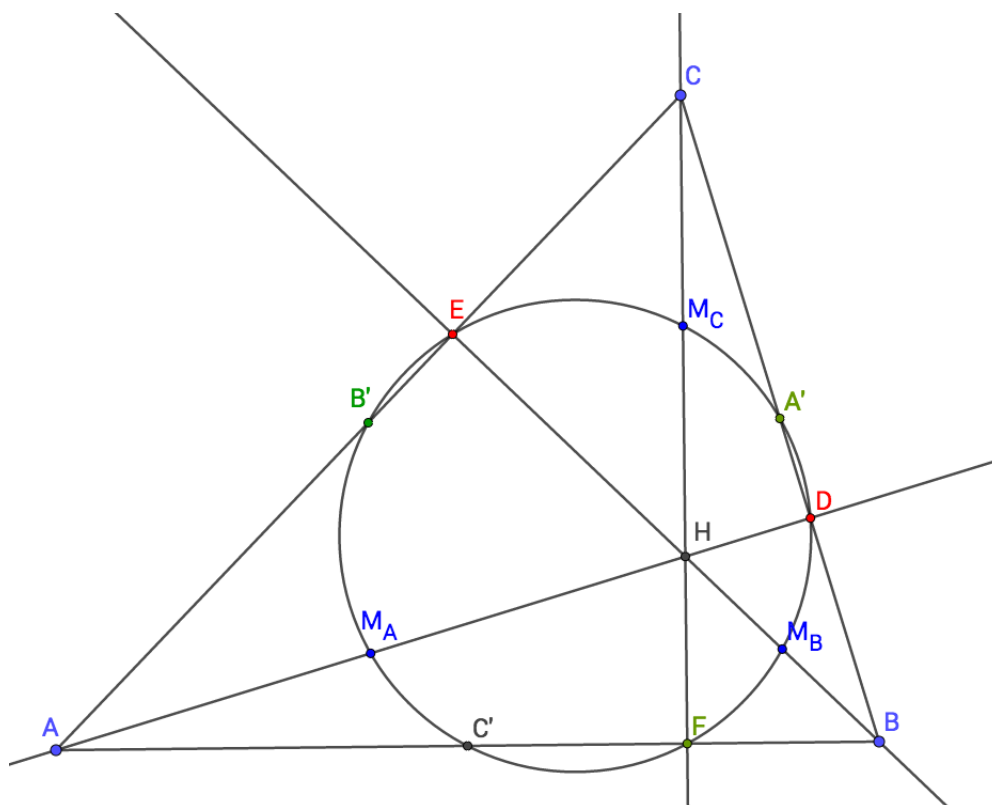
Vi avslutter dette notatet med den såkalte nipunksirkelen. Neste teorem sier at ni bestemte punkt i enhver trekant vil ligge på en sirkel, som vi kaller nipunksirkelen.

Teorem 6.1 (Nipunksirkelen). *La $\triangle ABC$ være en trekant. Følgende 9 punkt ligger alle på en felles sirkel:*

- Midtpunktene på de tre sidene av $\triangle ABC$.
- Føttene til de tre høydene i $\triangle ABC$.
- Midtpunktene på de tre linjestykkene mellom ortosenteret og hjørnene i $\triangle ABC$.

Bevis. La oss først innføre noen symboler. Vi lar H være ortosenteret til $\triangle ABC$, og som vanlig er A', B', C' midtpunktene på sidene av $\triangle ABC$. Videre er M_A midtpunktet på \overline{AH} , og tilsvarende er M_B og M_C midtpunktene på \overline{BH} og \overline{CH} . La så D, E og F være føttene til høydene i $\triangle ABC$ – alle disse punktene er vist i figur 14.

Påstand: $\square B'C'M_B M_C$ og $\square C'A'M_C M_A$ er rektangler.



Figur 14: Figur som viser nippettsirkelen til en trekant. Her er de røde punktene D, E, F føttene til høydene i $\triangle ABC$, de grønne punktene A', B', C' er midtpunktene på sidene i $\triangle ABC$ og de blå punktene M_A, M_B, M_C er midtpunktene på linjestykkene fra ortosenteret H til hjørnene i $\triangle ABC$.

Vi viser at $\square B'C'M_B M_C$ er et rektangel; beviset for den andre delen er identisk. Det følger fra teorem 2.1 at $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{B'C'}$ og at $\overrightarrow{M_B M_C} \parallel \overrightarrow{BC}$, siden

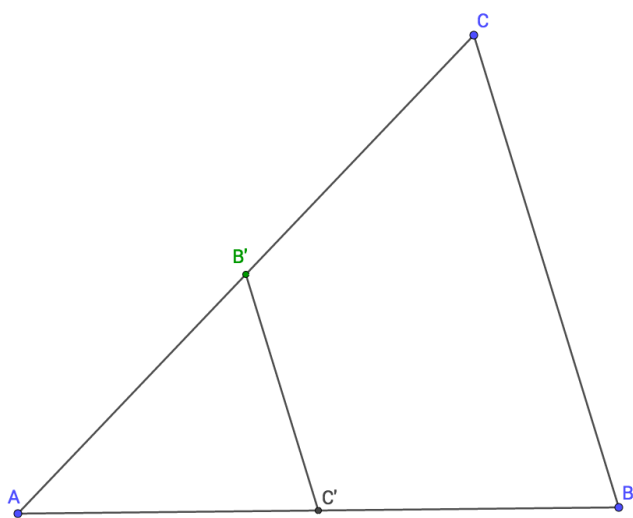
$$\frac{AB}{AC'} = \frac{AC}{AB'} = 2$$

og

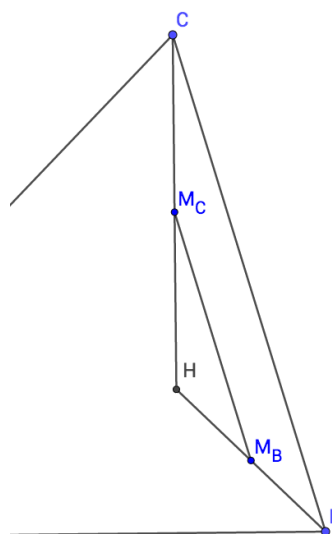
$$\frac{HC}{HM_C} = \frac{HB}{HM_B} = 2,$$

i figur 15 og 16 har vi forsøkt å fjerne uvesentlige detaljer for å vise at teorem 2.1 faktisk kan anvendes her. Dermed er $\overrightarrow{B'C'} \parallel \overrightarrow{M_B M_C}$. På samme vis får vi at $\overrightarrow{B'M_C} \parallel \overrightarrow{C'M_B} \parallel \overrightarrow{AH}$, og derfor er $\square B'C'M_B M_C$ et parallelogram.

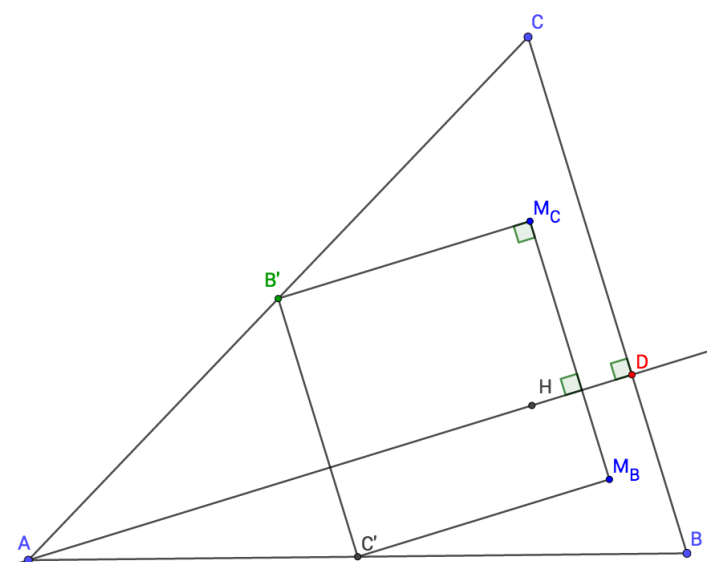
Beviset for at $\square B'C'M_B M_C$ faktisk er et rektangel er vist i figur 17: siden \overrightarrow{AH} er en høyde i trekanten, er $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$. Ved å anvende MAIVT på de parallelle linjene $\overrightarrow{M_B M_C}$ og \overrightarrow{BC} får vi at $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{M_B M_C}$. Deretter kan vi anvende MAIVT igjen, denne gangen på de parallelle linjene \overrightarrow{AH} og $\overrightarrow{B'M_C}$, og konkluderer med at $\overrightarrow{M_B M_C} \perp \overrightarrow{B'M_C}$, altså er et av hjørnene i $\square B'C'M_B M_C$ en rett vinkel, og av symmetri er også de andre vinklene rette. Altså er $\square B'C'M_B M_C$ et rektangel.



Figur 15

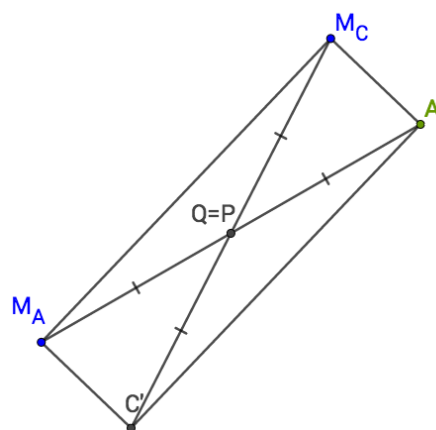
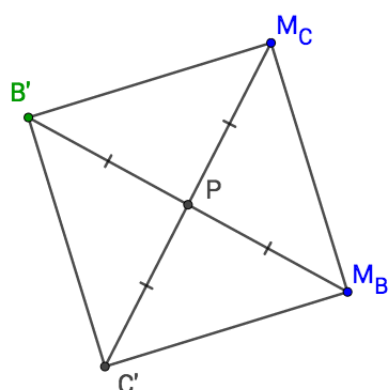


Figur 16



Figur 17: Figur som viser at $\square B'C'M_B M_C$ er et rektangel. Ved hjelp av MAIVT klarer vi å bruke at vinkelen ved D er rett til å vise at vinkelen ved M_C er rett.

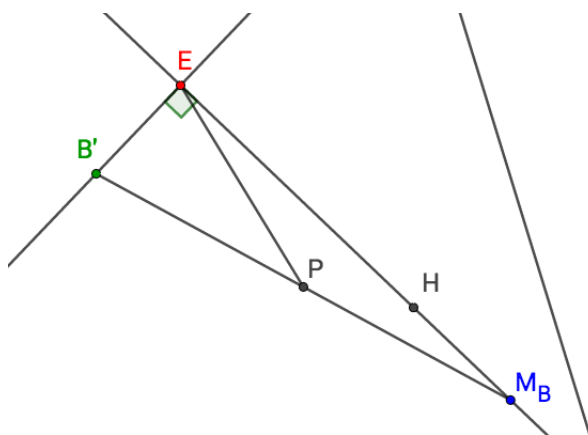
Et rektangel er spesielt et parallelogram. Derfor gir teorem 5.1.10 at diagonalene $B'M_B$ og $C'M_C$ skjærer hverandre på midtpunktet av diagonalene, se figur 18. Hvis P er skjæringspunktet mellom diagonalene, har vi altså at $PC' = PM_C$ og at $PB' = PM_B$. Siden de to diagonalene i et rektangel er like lange, har vi faktisk $PC' = PM_C = PB' = PM_B$. Med andre ord ligger B', C', M_B, M_C alle på sirkelen γ med sentrum i P og radius $r := PB'$.



Figur 18: Figur som viser rektanglet $\square B'C'M_B M_C$, Figur 19: Figur som viser rektanglet $\square A'C'M_A M_C$, og punktet P som blir sentrum i nippunktsirkelen. punktet $P = Q$ som blir sentrum i nippunktsirkelen.

Ved hjelp av samme argument får vi at $\square C'A'M_C M_A$ er et rektangel, og at diagonalene $\overleftrightarrow{C'M_C}$ og $\overleftrightarrow{A'M_A}$ skjærer hverandre i deres midtpunkt Q – se figur 19. Spesielt er Q midtpunktet på $\overline{C'M_C}$, men vi har allerede vist at dette midtpunktet er P . Derfor er $P = Q$. Siden $Q = P$ også er midtpunktet på $\overline{A'M_A}$, får vi at $A'P = M_A P$, og siden $\square C'A'M_C M_A$ er et rektangel er $A'P = M_A P = PC' = r$. Dermed har vi at A' og M_A ligger på γ^4 .

Det gjenstår å vise at D, E, F ligger på γ . Husk først at punktet P , som er sentrum av γ , er midtpunktet på $\overline{M_B B'}$ – se figur 20. Siden \overline{BE} er en høyde i $\triangle ABC$, vet vi at $\mu(\angle M_B E B') = 90^\circ$. Da sier teorem 8.3.3 at $EP = PM_B = r$, altså ligger E på sirkelen med radius r og sentrum P – og denne sirkelen er nettopp γ . På tilsvarende måte finner vi at D, F ligger på γ .



Figur 20: Figur som viser at vi kan bruke teorem 8.3.3 til å vise at $PE = PM_B$.

□

⁴Dette punktet ble ikke forklart tilstrekkelig i forelesning. Det er viktig å vise at $P = Q$, noe vi hoppet over i forelesning.