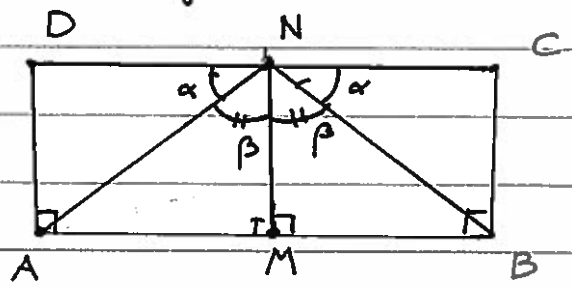
(ØVING 6, MA2401, V2016)

MERKNADER TIL LØSNING

Det var et par av oppgavene som de fleste hadde visse problemer med.

4.8 OPPGAVE 5, s.104



(2) Vi ønsker å bevise at

$\angle MND \cong \angle MNC$.

Har funnet tidligere at

$\angle DNA \cong \angle CNB$ og at

$\angle ANM \cong \angle BNM$

og trengen å vite at A er et indre punkt i $\angle DNM$ og at B er indre punkt i $\angle CNM$ for å kunne addere.

Må bevise:

(i) $A \sim M$ (rel $\overleftrightarrow{ND}$) og $A \sim D$ (rel $\overleftrightarrow{MN}$) og

(ii) $B \sim M$ (rel $\overleftrightarrow{NC}$) og $B \sim C$ (rel $\overleftrightarrow{MN}$).

Siden vi tidligere har bevist at $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{MN}$ og dessuten har at $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AD}$ har vi at $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{AD}$. Altså har vi at

$A \sim D$ (rel $\overleftrightarrow{MN}$)

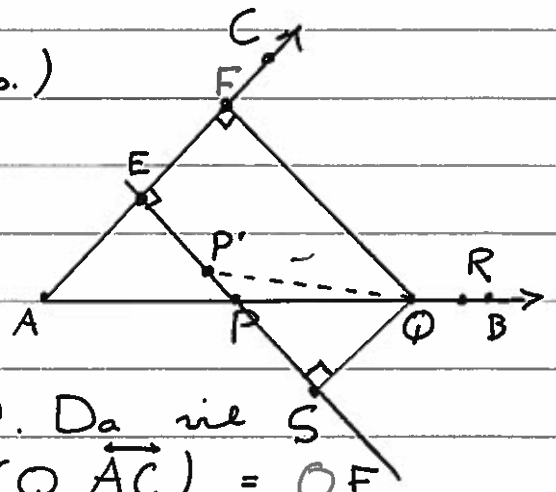
Siden D og C ligger på samme side av $\overleftrightarrow{AB}$ ut fra "konstruksjonen" av et Saccheri-kvadrilateral og $N \in \overline{DC}$ må $A \sim M$ (rel. $\overleftrightarrow{ND}$). Altså er (i) bevist.

(ii) bevises helt analogt. Altså har vi:

$\angle MND = \alpha + \beta = \angle MNC$.

Siden disse vinkler også utgjør et lineært par må $\underline{\overleftrightarrow{MN} \perp \overleftrightarrow{DC}}$.

(ØVING 6, MA2401, V2016)
(Merknad til løsingen, forts.)



OPPG. 10, s. 104

Vi skal bevise:

TEOREM 4.8.12 (Aristoteles T.)

$\angle BAC$ er spiss,

$P, Q \in \overrightarrow{AB}$ og $A * P * Q$. Da vil

(i) $d(P, \overleftrightarrow{AC}) = PE < d(Q, \overleftrightarrow{AC}) = QF$

(ii) For hver $d_0 > 0$ finnes det et punkt $R \in \overrightarrow{AB}$ s.a. $d(R, \overleftrightarrow{AC}) > d_0$

BEVIS:

(i) Vi observerer lett at $\angle EPQ$ er stumpe siden $\angle EPA$ er spiss. Antar vi at $EP \geq FQ$ kan vi velge $P' \in \overline{EP}$ s.a. $EP' = FQ$. Vi ser da at vi får et Saccheri-kvadrilateral der $\mu(\angle EP'Q) > 90$ – i strid med egenskapene i Teorem 4.8.10

(ii) Vi antar nå at $AP = PQ$ og lar S være fotpunktet for normalen fra Q på $\overleftrightarrow{EP}$. Da følger fra AAS at $\triangle APE \cong \triangle QPS$. Siden $\square ESQF$ er et Lambert-kvadrilateral, blir $ES \leq FQ$ ut fra (4), Teorem 4.8.11. Siden $ES = EP + PS = 2 \cdot EP$, følger det at $FQ \geq 2 \cdot EP$. Altså har vi:

$$AQ = 2 \cdot AP \Rightarrow FQ \geq 2 \cdot EP$$

eller: $d(Q, \overleftrightarrow{AC}) \geq 2d(P, AC)$. Enkelt følger:

$$AR = 2^n \cdot AP \Rightarrow d(R, \overleftrightarrow{AC}) \geq 2^n \cdot d(P, AC)$$

For gitt d_0, kan vi da finne n s.a. $R' \in \overrightarrow{AB}$ s.a. $d(R, \overleftrightarrow{AC}) \geq d_0$.