

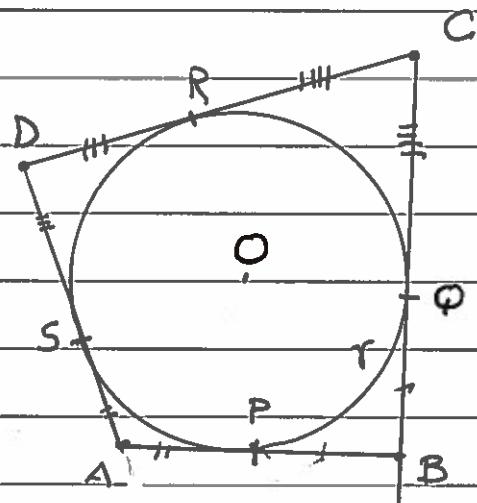
(1)

MA 2401, v2016

ØVING 10, uke 16

8.3 Oppg 8, s. 212

$\square ABCD$ er
omskrevet om
sirkelen γ dersom
hver side i $\square ABCD$ S
er tangent til sirkelen.



Vi skal bevise at i nøytral geometri så har vi:

$$AB + CD = BC + DA$$

Vi kaller berøringspunktene henholdsvis
 P, Q, R, S .

Fra oppg 6, s. 200, har vi:

$$PB = BQ, SA = PA, RD = SD, RC = QC.$$

Dette gir:

$$\begin{aligned} AB + CD &= AP + PB + CR + RD \\ &= SA + BQ + CQ + DS \\ &= (SA + DS) + (BQ + CQ) \\ &= \underline{\underline{AD + BC}} \end{aligned}$$

10.2 Oppg 9, s. 259

$$T_{AB} = p_m \circ p_e. \quad \text{Vi ser at}$$

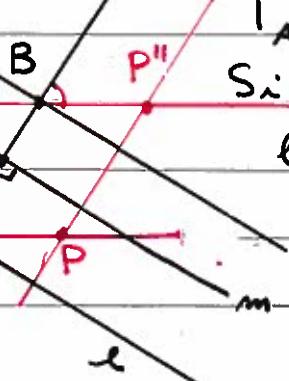
$$T_{AB}(A) = p_m(p_e(A)) = p_m(A) = B$$

Siden T_{AB} er en isometri,

bevares både avstander og vinkler.

$$B' = T_{AB}(B) \in k. \quad \text{Altå har vi}$$

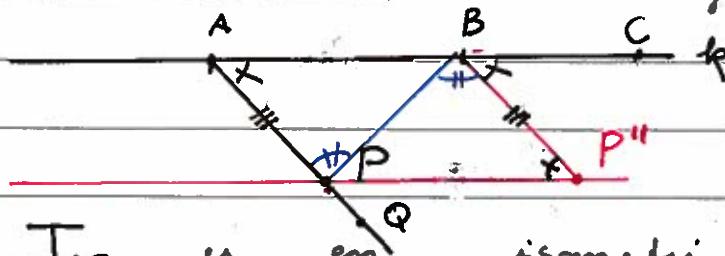
$$\angle B'BP'' \cong \angle BAP \quad \text{og} \quad BP'' = AP.$$



(2)

(øving 10, MA 2401, v 2016)

(a) Anta først at $P \in k = \overleftrightarrow{AB}$. Fra Teorem 10.2.8, del 1, følger: $T_{AB}(P) = P'' = S_{AB}(P)$
 Anta så at $P \notin k$. Velg $C = T_{AB}(B)$.



Siden T_{AB} er en isometri bewares avstanden både som retninger.

$$T_{AB}(A) = B \quad \text{og} \quad T_{AB}(P) = P''$$

Siden T_{AB} er en translasjon må

P og P' ligge på samme side av k .

Videre må $\angle PAB \cong \angle P''BC$ og $AP = BP''$.

Det følger da at $\overleftrightarrow{AP} \parallel \overleftrightarrow{BP'}$ ved korrespondende-rettel-teoremet. Ved
 NB! Vi er i euklidisk geometri får vi da:

$$\angle APB \cong \angle P''BP$$

Ved SAS får vi da

$$\triangle APB \cong \triangle P''BP$$

Av dette følger så

$$\textcircled{2} \quad \angle PAB \cong \angle BP''P$$

Kombineres \textcircled{1}, \textcircled{2} det ovenstående får vi:

$$\angle P''BC \cong \angle BP''P$$

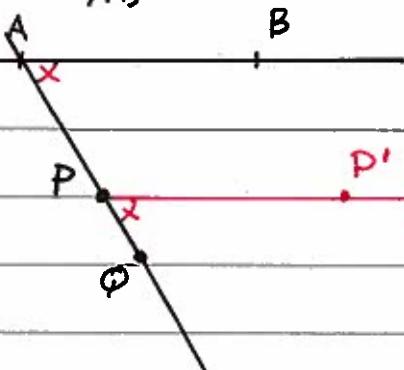
Derved følger det at
 $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{PP''}$

Aletså er $\square APP''B$ et parallelogram.

I euklidisk geometri er motstående sider like:
 $AB = PP''$

(3)

(ØVING 10, MA 2401, V2016)

Vi ser så på konstruksjonen av $S_{AB}(P)$.

Vi trekker en strike

fra P på samme side
av \overleftrightarrow{AP} der B liggs.a. $\angle QPP' \cong \angle PAB$. Vil du
 P' på denne striken s.a.
 $PP' = AB$.Siden $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{PP''}$ er

$$\angle QPP'' \cong \angle PAB \quad (\text{MAIVT})$$

$$\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{PP''}$$

og vi har:

Videre har vi da:

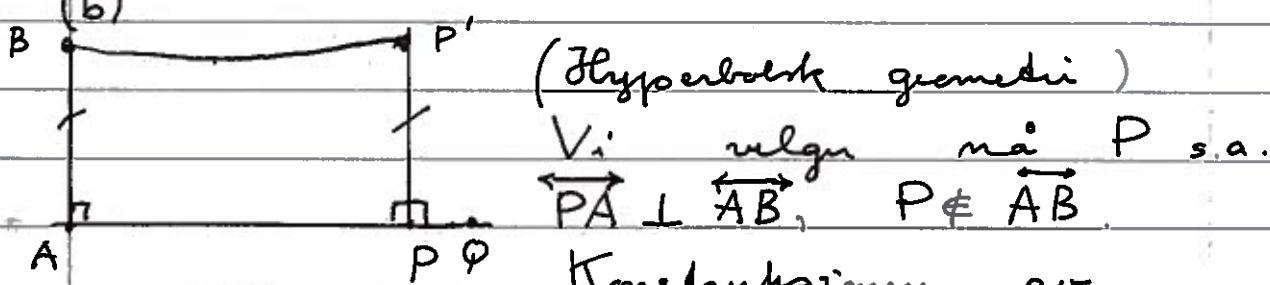
$$PP' = AB = PP''$$

Altså må $P' = P''$, eller m.a.o.

$$S_{AB}(P) = T_{AB}(P)$$

for vilkårlig P i planet.

(b)



Konstruksjonen av

 $P' = S_{AB}(P)$ gir at $\square BAPP'$ blir enSaccheri-firkant. Da vet vi fra før
at $BP' > AP$. Siden

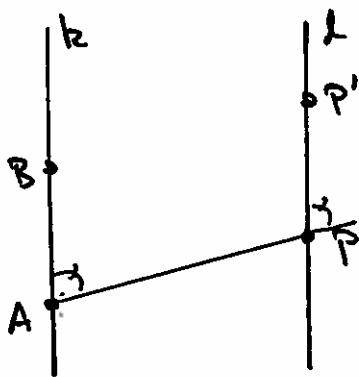
$$B = S_{AB}(A) \text{ og } P' = S_{AB}(P)$$

$$\text{og } S_{AB}(A)S_{AB}(P) = BP' \neq AP$$

er S_{AB} ikke en isoscel i hyperbolisk geometriAltså er $T_{AB} \neq S_{AB}$.

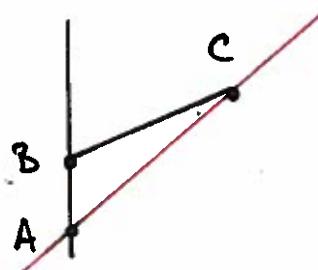
W.3 Oppg 2 s 262

(4)



Siden $S_{AB} = T_{AB}$, følger det at S_{AB} er bestrikket av T_{AB} : At enhver linje $l \parallel k$ (der $k = \overleftrightarrow{AB}$) er T_{AB} -invariant.

Men det finnes bare en transasjon som har l invariant og sender P til P' , nemlig $T_{PP'}$. Altså: Om $P' = T_{AB}(P)$, så er $T_{AB} = T_{PP'}$.

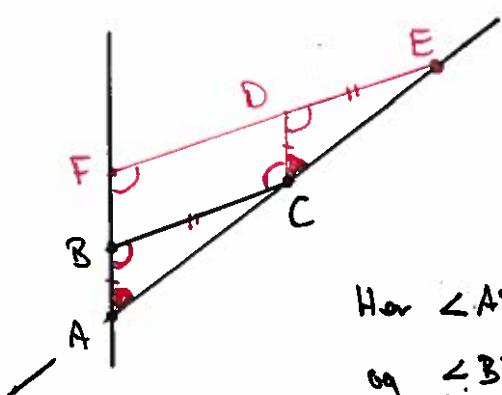


Så hvis jeg har to transasjoner, kan de alltid skrives på formen T_{AB} og T_{BC} .

Påstand: $T_{BC} \circ T_{AB} = T_{AC}$.

Hvis A, B, C er kolineare, er dette nokså opplagt.

(Unntak: Hvis $C = A$, da $T_{BC} \circ T_{AB} = L$!)



Anta A, B, C ikke-kolineare:

$$(T_{BC} \circ T_{AB})(A) = T_{BC}(B) = C.$$

Skriv $D = T_{AB}(C)$ og $E = T_{BC}(D)$.

Påstand: $E \in \overleftrightarrow{AC}$.

Her $\angle ABC \cong \angle BFD$ fordi $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{DE}$

og $\angle BFD \cong \angle CDE$ fordi $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

Og $\angle BCD \cong \angle CDE$. Så $AB = CD$, $BC = DE$, så $\triangle ABC \cong \triangle CDE$ (ved SAS). Spesielt er $\angle DCE \cong \angle BAC$, og siden $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, følger at A, C, E er kolineare! Dvs. $(T_{BC} \circ T_{AB})(C) \in \overleftrightarrow{AC}$.

Siden $T_{BC} \circ T_{AB}$ er en isometri, sender den linjen på linjen. Og siden både A og C avbildes inn i \overleftrightarrow{AC} , er \overleftrightarrow{AC} en invariant linje for $T_{BC} \circ T_{AB}$.

Sammensetningen er ikke en gliedrefleksjon: ~~kan ikke dømme~~ $(T_{BC} \circ T_{AB})(B) = T_{BC}(F) = D$ i figuren, og B, D ligger på samme side av \overleftrightarrow{AC} .

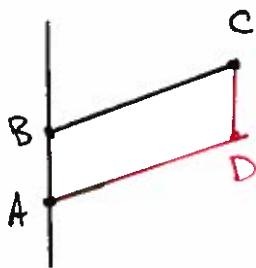
Altså er $T_{BC} \circ T_{AB} = T_{AC}$.

(5)

Før å vise at $T_{BC} \circ T_{AB} = T_{AB} \circ T_{BC}$,

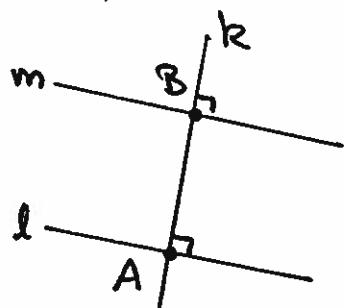
konstruerer vi parallelogrammet $\square ABCD$:

Så er $T_{AB} = T_{DC}$ og $T_{BC} = T_{AD}$, så



$$T_{AB} \circ T_{BC} = T_{DC} \circ T_{AD} = T_{AC} = T_{BC} \circ T_{AB}.$$

Oppg. 10.3.3 s 262

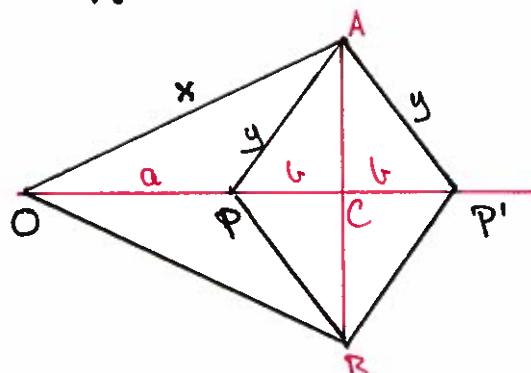


$$\text{Hvis } k = \overleftrightarrow{AB}, \text{ så } H_A = p_k \circ p_l = p_l \circ p_k \\ \text{og } H_B = p_k \circ p_m = p_m \circ p_k$$

$$\text{Det gir } H_B \circ H_A = p_m \circ p_k \circ p_k \circ p_l = p_m \circ p_l.$$

Dette er transasjonen T_{AC} , der $A \neq B \neq C$ og $AB = BC$.

10.7 Oppg. 8 s. 284



Med a og b som i figuren får vi fra Pythagoras 2 ganger:

$$x^2 - (a+b)^2 = y^2 - b^2$$

(begge sider er kvadratet på AC)

~~$$\text{Det gir } a^2 + 2ab = x^2 - y^2.$$~~

Skriv det som

$$a \cdot (a+2b) = r^2, \text{ der } r^2 = x^2 + y^2.$$

Det vil si $OP \cdot OP' = r^2$.

Det er klart at ~~OP og P'~~ er kolinære, så P og P' er innbyrdes inverse mhp $C(O, r^2)$.

Vi vet at om vi inverterer en sirkel gjennom O, får vi en linje. Så om P trives til å ligge på en slik sirkel, blir P'liggende på denne linjen. Vi får ikke hele linjen, for $OP' \leq x+y$.