

①

MA 2401

Innleivningsprøve vårsesongen 2016

OPPGAVE 1: (NØYTRAL GEOMETRI)

Vi antar at $P \notin \Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$.

Vi skal bevise:

$$(i_1) \Leftrightarrow (i_2)$$

$$\Downarrow \quad \Updownarrow$$

$$(i_3) \Rightarrow (i_4)$$

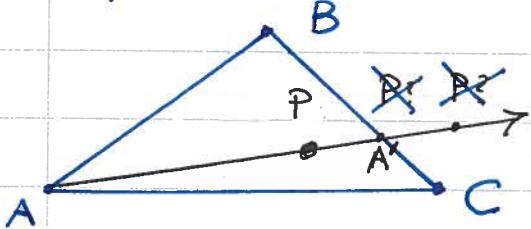
$(i_1) \Leftrightarrow (i_2)$: P er indre punkt i $\Delta ABC \Leftrightarrow$
 P er et indre punkt i $\angle BAC$ og indre
 punkt $\angle ABC$ og indre punkt i $\angle BCA$.

Dette betyr at

$$P \sim A \text{ (rel } \overleftrightarrow{BC}) , (i_{2a})$$

$$\text{og } P \sim B \text{ (rel } \overleftrightarrow{CA}) , (i_{2b})$$

$$\text{og } P \sim C \text{ (rel } \overleftrightarrow{BA}) , (i_{2c}).$$

Altså $(i_1) \Leftrightarrow (i_2)$ $(i_1) \Rightarrow (i_3)$:Anta at (i_1) holder. Vi har da
 spesielt at $\overrightarrow{AP} \cap \overline{BC} = \{A'\} \neq \emptyset$ fra
 tverrligger-teoremetSiden $P \sim A$ (rel \overleftrightarrow{BC})
 må $P \in \overleftrightarrow{AA'}$. Altså
 holder (i_3) . $(i_3) \Rightarrow (i_4)$:Vi antar (i_3) og la ℓ være en
 linje gjennom P som er $\neq \overleftrightarrow{AA'}$. Ved
 Paschs aksiom anvendt på $\triangle AA'B$ må
 ℓ skjære \overline{AB} eller $\overline{BA'}$ eller $\overline{A'A}$. Altså
 vil enhver linje gjennom P møte $\triangle ABC$.

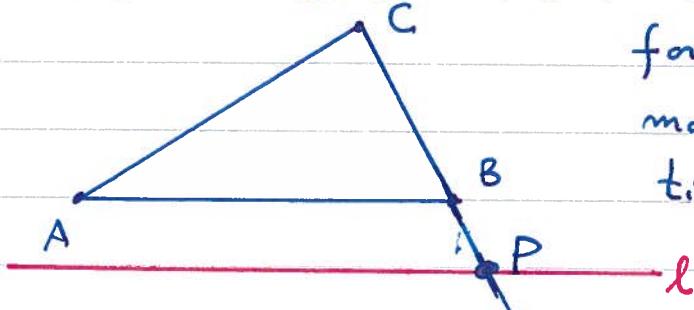
(2)

Innleiringsprøve (forts.)

 $(i_4) \Rightarrow (i_2)$:

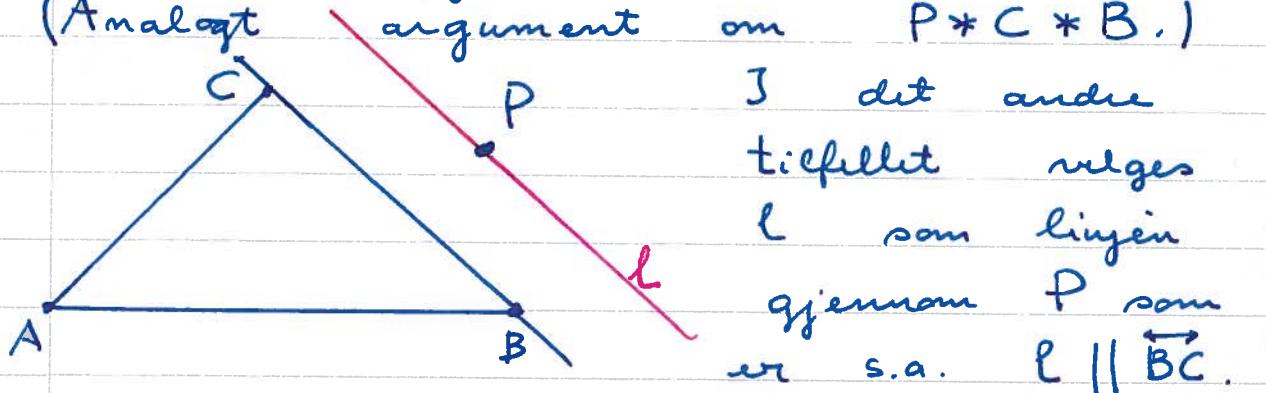
Anta: (i_2) ikke holder. UTAG kan vi da anta at i_{2a} ikke holder. D.v.s. at $P \in \overleftrightarrow{BC}$ eller $P \times A$ (ne \overleftrightarrow{BC}). Siden vi

forutsetter at $P \notin \overleftrightarrow{BC}$, må vi i det først tilfallet ha at $P \in \overleftrightarrow{BC} - \overline{BC}$.



Linjen l gjennom P som er parallel med \overleftrightarrow{AB} kan da ikke sljøre A når $P * B * C$.

(Analagt argument om $P * C * B$.)



I det første tilfallet overfor ser vi at l ikke kan sljøre \overline{AC} eller \overline{BC} siden $P * B * C$ og dermed ikke $\sim A$ (ne l) og $C \sim B$ (ne l)

Et tilsvarende argument viser at \overline{AC} og \overline{AB} ikke kan sljøre l i det andre tilfallet.

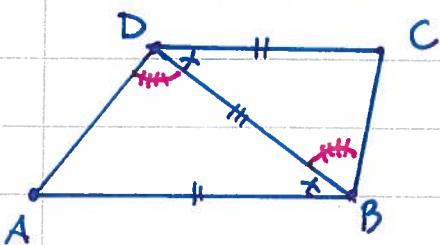
Altså (i_4) holder ikke. Dermed har vi bevist at

$$\neg(i_2) \Rightarrow \neg(i_4)$$

eller ekvivalent $(i_4) \Rightarrow (i_2)$

(\neg betyr negasjonen til)

Innleningsoppgave (fort.)

OPPGAVE 2: (EUKLIDSK GEOMETRI)

Vi antar her at
 $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ og at $\overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{CD}$.

Vi påstår at da må
 $\square ABCD$ være et parallellogram.

Vi trekker diagonalen \overline{BD} og ser
 på trekantene $\triangle ABD$ og $\triangle CDB$.

Siden \overleftrightarrow{DB} er en transversal til de
 to parallelle linjene \overleftrightarrow{AB} og \overleftrightarrow{CD} följer
 det fra MAIVT att $\angle ABD \cong \angle CDB$
 (Euklidisk geometri!!)

Vidare har vi
 $\overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{CD}$ ut fra antagelsen og \overline{DB}
 er felles for de to översta
 trekanterna. Ut fra SAS har vi därför:

$$\triangle ABD \cong \triangle CDB.$$

Spesielt har vi da:

$$\angle ADB \cong \angle CBD$$

Siden \overleftrightarrow{BD} är en transversal för
 linjerna \overleftrightarrow{AD} och \overleftrightarrow{BC} , följer det
 från AIVT att $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$. Altså
 är $\square ABCD$ et parallellogram.

OPPGAVE 3: (HYPERBOLISK GEOMETRI)

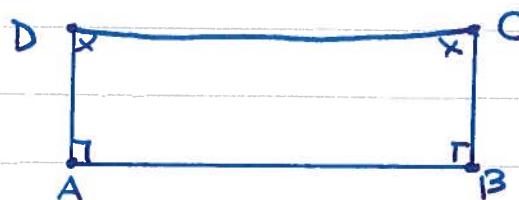
Vi skal påvisa at det finnes parallella-
 gram $\square ABCD$ der motstående sider
 har forskjellig lengde og der
 to motstående vinkler ikke er kon-
 gruente.

Vi ser på en Saccheri-firkant.

Innleningsprøve (forts.)

Fra Teorem 4.8.10,(4), følger det at i en Saccheri-kvadrilateral er et parallellagram i nøytral geometri. Det er følgelig også et parallellogram i hyperbolisk geometri.

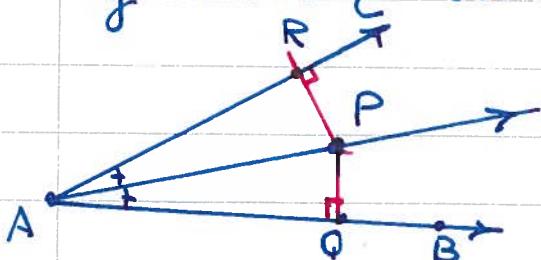
Fra Korollar 6.1.4 har vi at topp-vinklene er spiss og derfor forskjellig fra basis-vinklene som er rette.



Fra Korollar 6.1.10 har vi at lengden CD av toppen er større enn lengden av basis AB.

OPPGAVE 4:

(a) Vi skal bevise at i nøytral geometri vil et punkt P som ligger i det indre av $\angle BAC$ ligge på innelhalbatingsstaben til $\angle BAC$ hvis og bare hvis $d(P, \overleftrightarrow{AB}) = d(P, \overleftrightarrow{AC})$.



(i) Anta at P ligger på innelhalbatingsstaben til $\angle BAC$. D.v.s. at $\angle PAQ \cong \angle PAR$. Q og R er fotpunktene for normalen fra P på henholdsvis \overleftrightarrow{AB} og \overleftrightarrow{AC} . Siden

$\angle PAQ$ og $\angle PAR$ legge er spiss følger det lett fra YVT at $Q \in \overleftrightarrow{AB}$ og $R \in \overleftrightarrow{AC}$.

Innleveringsoppgave (forts.)

Vi har da at \overline{PA} er felles for $\triangle PAQ$ og $\triangle PAR$ og ut fra SAA følger at $\triangle PAQ \cong \triangle PAR$. Av dette følger.

$$PQ = PR$$

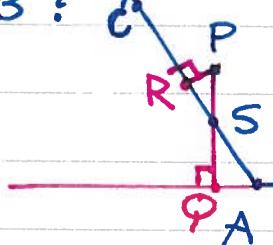
Ut fra Teorem 4.3.4 bryr dette at

$$d(P, \overleftrightarrow{AB}) = d(P, \overleftrightarrow{AC})$$

(ii) Vi antar så at

$$d(P, \overleftrightarrow{AB}) = d(P, \overleftrightarrow{AC})$$

og at P er et innde punkt i $\angle BAC$. Dette gir at $PQ = PR$ der Q og R er definert som ovenfor. Kunne vi må risikere at $Q \notin \overrightarrow{AB}$? M.a.o. kunne Q ligge på den motsatte side av \overrightarrow{AB} ?



I så fall har vi

$$PR = d(P, \overleftrightarrow{AC}) < PS < PQ,$$

der $\{S\} = \overline{PQ} \cap \overleftrightarrow{AC}$.

Men dette er i stid med vår antagelse. Altså må $Q \in \overrightarrow{AB}$ og $R \in \overrightarrow{AC}$. (Det siste innsees analogt med det første!)

Ved Teorem 4.2.5 (Hypotenuse-katet-teoremet) får vi da at

$$\triangle PAQ \cong \triangle PAR$$

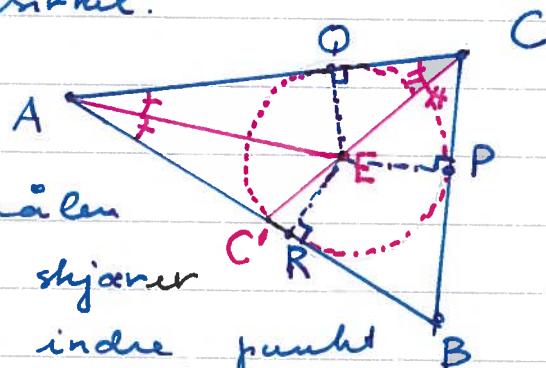
Spesielt har vi da at

$$\angle BAP \cong \angle CAP.$$

(6)

Innleveringsoppgave (fort.)

- (b) Vi skal bevise at enhver trekant i nøytral geometri har en innskrevet sirkel.



Halveringsstasjonen til $\angle ACB$ skyarer \overline{AB} i et indre punkt

C' ut fra tverrliggende-teorem. Halveringsstasjonen til $\angle BAC$ skyarer \overline{BC} i et indre punkt E ut fra samme teorem.

Ut fra (a) i denne oppgaven har vi:

$$d(E, \overleftrightarrow{BC}) = d(E, \overleftrightarrow{AC}) \stackrel{def}{=} r$$

og

$$d(E, \overleftrightarrow{AC}) = d(E, \overleftrightarrow{AB}) \stackrel{def}{=} r$$

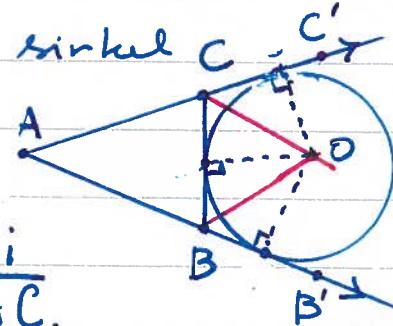
Av dette følger at en sirkel $C(E, r)$ tangerer de tre sidene i $\triangle ABC$ i punktene P, Q, R som er fotpunktene fra de tre normalene på de tre sidene.

($C(E, r)$ betegner her sirkelen med sentrum i E og radius r .)

- (c) Vi skal bevise at i euclidisk geometri vil enhver trekant $\triangle ABC$ ha en utskrevet sirkel C'

på siden \overline{BC} . D.v.s. at sirkelen tangerer i det indre av \overrightarrow{BC} og i $\overrightarrow{AB} \setminus \overrightarrow{AB}$ og i $\overrightarrow{AC} \setminus \overrightarrow{AC}$.

Vi tegner halveringsstasjonen for



(Innlearringsprøve, forts.)

de to vinklene $\angle B'BC$ og $\angle C'CB$ og skal påske at disse strålene skyarer hverandre i et punkt O . Dette skyldes det faktum begge vinklene $\angle B'BC$ og $\angle C'CB$ er $< 180^\circ$ og dermed er

$$\frac{1}{2}\mu(\angle B'BU) + \frac{1}{2}\mu(\angle C'C) < 180^\circ.$$

Påstanden følger dermed fra Euclids postulat V (Se s.93)

Ut fra oppg. 4(a), har vi da at

$$d(O, \overleftrightarrow{AB}) = d(O, \overleftrightarrow{BC}) = d(O, \overleftrightarrow{AC}) = r.$$

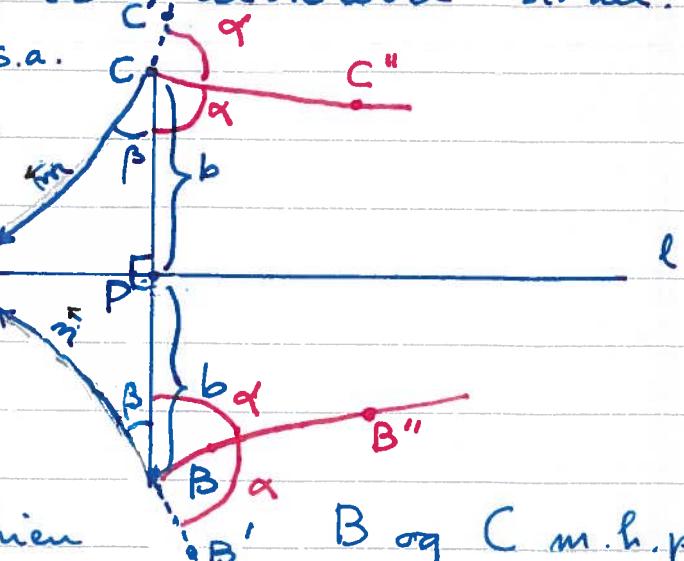
Aldå vil sirkelen $\gamma = C(O, r)$

berøre de tre nærmeste linjesegmentene/strålene. γ er da en rettskrevet sirkel på siden \overline{BC} .

(d) Vi skal konstruere en trekant $\triangle ABC$ i hyperbolisk geometri som ikke har noe rettskrevet sirkel.

Vi velger l , $\overline{BC} \perp l$, s.a. C' og C'' er punkter på l med $C' \neq C''$. Vi velger β , s.a. $\beta < \pi(b)$, den kritiske vinkelen for b . Da vil strålene \vec{m} og \vec{n} skyære l i et punkt P som betegnes A .

(Her benyttes symmetrien i l .)



(Innleveringsprøve, fors.)

Spørsmålet som da gjengjærlig m.h.t. konstruksjonen er da om halveingstrikkene til $\angle PBB'$ og $\angle PCC'$ må skjære hverandre slik tilføllet var i den euklidiske konstruksjonen. P.g.a. symmetrien må i tilføllet at vi har slyjing må dette slyjingspunktet nödren digris ligge på l .

Kan det være at strikkene $\vec{B}B''$ og $\vec{C}C''$ er slik at de ikke slyjeres hverandre - og da heller ikke l ?

I så fall må $\alpha \geq \gamma(b)$. Vi har dessuten

$$\beta + 2\alpha = 180$$

eller $\alpha = 90 - \beta/2$. Er det mulig å velge β s.a.

$$\beta < \gamma(b) \text{ og } 90 - \beta/2 > \gamma(b)$$

eller ekvivalent

$$\beta < \min(\gamma(b), 180 - 2\gamma(b)) ?$$

Når b er gitt og $b > 0$ er

$$0 < \gamma(b) < 90,$$

og dermed er $\min(\gamma(b), 180 - 2\gamma(b))$ et positivt tall. For hvilket $b > 0$ finnes det altså en $\triangle ABC$ som ikke kan ha utskreven sirkel på siden \overline{BC} .