MA2401 Geometri

Innleveringsprøve vårsemesteret 2016.

Se websiden for kurset om frist og innlevering.

Oppgave 1 I nøytral geometri sier vi at P er et *indre punkt* i $\triangle ABC$ dersom P er et indre punkt i alle de tre vinklene $\angle CAB$, $\angle ABC$ og $\angle BCA$.

Anta at P er et punkt som ikke ligger på $\triangle ABC$ (husk definisjonen $\triangle ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$). Vis at alle påstandene (i_1)–(i_4) er ekvivalente:

(i_1) P er et indre punkt i $\triangle ABC$.

(i_2) Alle de tre betingelsene nedenfor holder:

- (i_{2a}) P og A ligger på samme side av $\overleftrightarrow{BC}$,
- (i_{2b}) P og B ligger på samme side av $\overleftrightarrow{CA}$,
- (i_{2c}) P og C ligger på samme side av $\overleftrightarrow{AB}$.

(i_3) Det finnes et punkt A' på $\overline{BC}$ slik at P ligger på $\overline{AA'}$.

(i_4) Enhver linje ℓ gjennom P møter $\triangle ABC$ (det vil si $\ell \cap \triangle ABC \neq \emptyset$).

Oppgave 2 Vis følgende i euklidsk geometri: Anta at $\square ABCD$ er en firkant slik at $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ og $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. Da er $\square ABCD$ er parallellogram.

Oppgave 3 I hyperbolsk geometri, vis at det finnes et parallellogram som har motstående sider av forskjellig lengde og motstående vinkler som ikke er like hverandre.

Oppgave 4

a. Gi et bevis for følgende standardresultat i nøytral geometri: Et punkt P i det indre av $\angle BAC$ ligger på vinkelhalveringsstrålen til $\angle BAC$ hvis og bare hvis $d(P, \overleftrightarrow{AB}) = d(P, \overleftrightarrow{AC})$.

b. Vis at enhver trekant $\triangle ABC$ i nøytral geometri har en *innskrevet sirkel*, med andre ord en sirkel γ som tangerer $\overleftrightarrow{AB}$ i et indre punkt i $\overline{AB}$, og tilsvarende med de to andre sidene.

c. En *utskrevet sirkel* til $\triangle ABC$ på siden $\overline{BC}$ er en sirkel som tangerer hver av linjene $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ og $\overleftrightarrow{CA}$, med ett tangeringspunkt i det indre av $\overline{BC}$ og de to andre tangeringspunktene i $\overrightarrow{AB} \setminus \overline{AB}$ og $\overrightarrow{AC} \setminus \overline{AC}$ ($\setminus$ er symbolet for mengdedifferanse.)

Vis i euklidsk geometri at $\triangle ABC$ har en utskrevet sirkel på siden $\overline{BC}$.

d. Konstruer en trekant $\triangle ABC$ i hyperbolsk geometri som ikke har noen utskrevet sirkel på siden $\overline{BC}$.

(Dette punktet kan være vanskelig. Her er noen hint: Velg en linje ℓ og en normal n på ℓ, med to punkter B og C på n, i samme avstand b fra ℓ på motsatte sider av ℓ. Prøv å plassere A på ℓ og benytt den kritiske vinkelen $\kappa(b)$ til å finne moteksemplet.)