MA 2401

ØVING 3 – 5/2-2014

3.2 **Oppg. 11, s. 46**

Avstandsfunksjonen i $\mathbb{R}^2$ er gitt ved:

$$D((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\}$$

i følge oppg. 8, s. 45

Vi ser på to tilfeller:

(i) $y = kx+b$, $|k| \geq 1$. Da har vi når $P=(x_1,y_1)$, $Q=(x_2,y_2)$:

$$|y_1-y_2| = |(kx_1+b)-(kx_2+b)| = |k||x_1-x_2| \geq |x_1-x_2|$$

Vi definerer for en slik linje

$$f(x,y) = y$$

Må bevise at f er injektiv og surjektiv. og at $|f(P)-f(Q)| = PQ$.

Det første gjennomføres nøyaktig som for siste del av oppg 10, s. 46. Videre har vi:

$$|f(P)-f(Q)| = |y_1-y_2| = \max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\}$$

(ii) $y = kx+b$, $|k| \leq 1$; $k \neq 0$

Her blir $|x_1-x_2| = \left|\frac{y_1-b}{k} - \frac{y_2-b}{k}\right| = \frac{1}{|k|}|y_1-y_2|$ $\geq |y_1-y_2|$. Her setter vi $f(x,y)=x$.

f er opplagt en bijeksjon, og vi har:

$$|f(P)-f(Q)| = |x_1-x_2| = PQ.$$

For $k=0$, setter vi også $f(x,y)=x$

Her blir linjen $y=b$ og $PQ = |x_1-x_2|$.

Oppg. 15, s. 46

Vi skal bevise KOROLLAR 3.2.20: Hvis $A \neq B$ og f er en koordinatfunksjon for $\ell = \overleftrightarrow{AB}$ s.a. $f(A)=0$ og $f(B) \geq 0$, så er $\overrightarrow{AB} = \{P \in \ell \mid f(P) \geq 0\}$.

(ØVING 2, 5/2-2014)

BEVIS:

(a) Anta at $P \in \overrightarrow{AB}$. Vi deler opp i følgende:

(i) $P = A$ eller $P = B$ gir $f(P) \geq 0$ som antatt.

(ii) $A * P * B$: Ut fra Teorem 3.2.17 har vi da at $f(P)$ ligger mellom $f(A) = 0$ og $f(B) > 0$. Altså er $f(P) \geq 0$.

(iii) $A * B * P$: Dette gir at $f(B)$ ligger mellom $f(A) = 0$ og $f(P)$. Siden $f(B) > 0$ får vi at $f(P) > 0$ ut fra egenskaper ved tallinjen. Altså er $f(P) \geq 0$

Tilsammen gir da (i), (ii), (iii):

$\overrightarrow{AB} \subseteq \{P \in \ell \mid f(P) \geq 0\}$.

(b) Anta så at $f(P) \geq 0$. Skal bevise at da må $P \in \overrightarrow{AB}$, m.a.o. at

(∇) $\{P \in \ell \mid f(P) \geq 0\} \subseteq \overrightarrow{AB}$.

Hvis $P \notin \overrightarrow{AB}$, må $P * A * B$ ut fra definisjonen av $\overrightarrow{AB}$ og Korollar 3.2.19. Da ligger $0 = f(A)$ mellom $f(P)$ og $f(B) > 0$. Altså må $f(P) < 0$ og $P \notin \{P \in \ell \mid f(P) \geq 0\}$

Altså holder (∇).

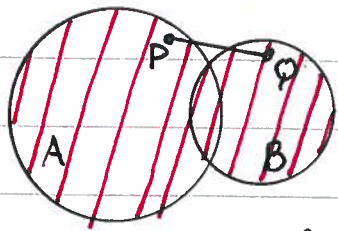
3.3 Oppg. 1, s. 51

Vi skal bevise at snittet $A \cap B$ av to konvekse mengder A og B også er konvekst. La $P \neq Q$, der $P, Q \in A \cap B$. Siden spesielt P og Q ligger i A og A er konveks må $\overline{PQ} \subseteq A$. Helt analogt får vi at $\overline{PQ} \subseteq B$.

(ØVING 2, 5/2-2014) ③

Altså har vi at $\overline{PQ} \subseteq A \cap B$. Følgelig er $\overline{PQ}$ en konveks mengde.

Vi ser straks at enhver disk i $\mathbb{R}^2$ er konveks.



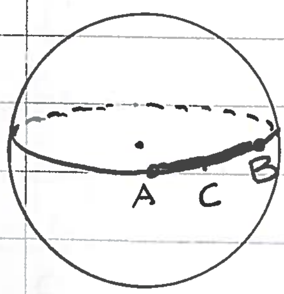
Men figuren viser at unionen av to disker ikke behøver å være konveks.

Er $\emptyset$ konveks? Dette må sies å være et definisjonsspørsmål: Vi kan ikke finne to punkt $P \neq Q$ i $\emptyset$ s.a. $\overline{PQ}$ ikke ligger i $\emptyset$. Altså kan man vel si at $\emptyset$ er konveks på logisk grunnlag.

Oppg. 4, s.51

(Vi trenger vel Oppg. 6, s.45, før vi starter på denne oppgaven!)

Denne metrikken er definert ved at



avstanden $s(A,B)$ er lengden av den korteste delbuen av storsirkelen som bestemmes av punktene A og B når A og B ikke er antipodale. Er A og B antipodale settes avstanden lik lengden av halvsirkelen – likegyldig hvilken av storsirklene gjennom A og B man ser på. Hvis radien i kulen er 1 blir denne siste avstanden lik π.

Dersom A og B ikke er antipodale og P ligger på den korteste av de to delbuer,

(ØVING 2, 5/2-2014)

Som vanlig defineres mellomliggenhet ved:

$A * C * B \iff s(A,C) + s(C,B) = s(A,B)$.

(a) Dersom A og B ikke er antipodale er mengden $\{C \mid A*C*B\}$ alle punkter C som ligger på den korteste av de to delbuene av storsirkelen mellom A og B. (Se figuren foran!)

(b) Er A og B antipodale ser vi at $s(A,C) + s(C,B) = s(A,C)$ for alle punkter på storsirkelen, s.a. $C \neq A$ og $C \neq B$. (Mengden er skissert som hele storsirkelen på figuren foran!)

(Oppg. 4, s. 51, forts.)

Siden "linjer" i denne geometrien er storsirkler på kulen, blir halvplanene m.h.p. en linje de to halvkuler som framkommer ved en gitt storsirkel.

(a) Det er klart at $H_1 \cap H_2 = \emptyset$, $H_1 \neq \emptyset$ og $H_2 \neq \emptyset$. Videre er både H_1 og H_2 konvekse. La nemlig $P, Q \in H_1$. Segmentet av $\overleftrightarrow{PQ}$, $\overline{PQ}$, er den lille delbuen av storsirkelen gjennom P og Q. Dette segmentet er inneholdt i H_1 ut fra egenskaper ved sirkelbuer på kulen. Altså er H_1 konveks. Analogt får vi at H_2 er konveks. Likeledes vil et segment $\overline{PQ}$, der $P \in H_1$ og $Q \in H_2$, måtte skjære den aktuelle storsirkelen.

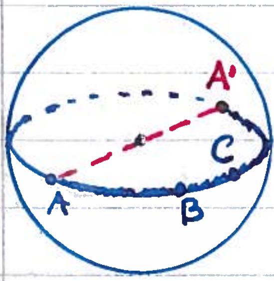
(ØVING 2, 5/2 - 2014)

(b) $A \neq B$, ikke antipodale punkt.
Finn alle C som er s.a.

$$A * B * C.$$

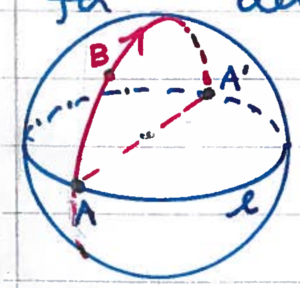
Vi skal da ha C på storsikelen bestemt av A og C og s.a.

$$s(A,B) + s(B,C) = s(A,C)$$



Vi ser at denne likhet holder bare til punktet $C = A'$ som er antipodalt til A. Strålen er da den halvsirkelen på kulen som inneholder B, inkludert de to endepunktene A og A'.

(c) Holder Teorem 3.3.9, Stråleteoremet, for denne modellen? Ligger alle

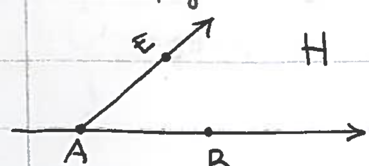


punkter C på $\overrightarrow{AB}$ i samme halvplan som B i forhold til linjen l? Svaret er NEI fordi strålen $\overrightarrow{AB}$ ender i A' - det antipodale punktet til A.
Vi har nemlig: . .

$$s(A,A') = s(A,B) + s(B,A'),$$

så man har $A' \in \overrightarrow{AB}$ og samtidig at $A' \in l$.

3.4 Oppg. 2, s 55



For $A \neq B$ definerer vi $l = \overleftrightarrow{AB}$ og $\mathcal{A} = \{\angle BAE \mid E \in H\}$, der H er det ene av de to halvplan bestemt av l. Vi definerer så:

(ØVING 2, 5/2 - 2014)

$$f : \mathcal{A} \to (0, 180)$$

ved at $f(\angle BAE) = \mu(\angle BAE)$.

(a) Vi skal bevise at f er 1-1-tydig (injektiv)

Vi antar : $f(\angle BAE) = f(\angle BAF)$

D.v.s. at $E, F \in H$ og at

$$\mu(\angle BAE) = \mu(\angle BAF)$$

Ut fra entydigheten i ~~Teorem~~ Aksiom 3.4.1,

må da $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF}$. Altså har vi:

$$\angle BAE = \angle BAF.$$

Altså er f injektiv. Surjektiv: Av aksiom 3.4.1 punkt 3: For hvert reelle tall r, $0 < r < 180$ og hvert halvplan H avgrenset av $\overleftrightarrow{A}$. eksisterer en unik stråle $\overrightarrow{AE}$ s.a. E ligger i H og $\mu(\angle BAE) =$

(b) Vi skal så bevise at :

$\overrightarrow{AF}$ ligger mellom $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AE}$

$$\Downarrow$$

$$f(\angle BAF) \in (0, f(\angle BAE))$$

eller ekvivalent :

$$0 < \mu(\angle BAF) < \mu(\angle BAE)$$

Siden $F \in H$ er det klart at

$$0 < \mu(\angle BAF) < 180$$

Ut fra Teorem 3.4.5 (hvis-delen) følger:

$$\mu(\angle BAF) < \mu(\angle BAE). \qquad \square$$

" $\Leftarrow$ " Anta $f(\angle BAF) \in (0, f(\angle BAE))$, altså at $0 < \mu(\angle BAF) < \mu(\angle BA$

Fra teorem 3.4.5 ligger da strålen $\overrightarrow{AF}$ mellom $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AE}$.