MA 2401

ØVING 2, 27/1 - 2014

3.2 Oppg. 2, s. 45

Vi skal bevise at den Euklidske metrikken gitt ved

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$$

i $\mathbb{R}^2$ virkelig er en metrikk, d.v.s. oppfyller betingelsene 1, 2 og 3 i Def. 3.2.9.

1.

$$d(P_1,P_2) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$$
$$= \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} = d(P_2,P_1)$$

2.

$$d(P_1,P_2) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} \geq 0$$

for alle $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$, siden $\sqrt{a}$ gir ≥ 0 for alle $a \geq 0$.

3. $d(P_1,P_2) = 0 \Rightarrow \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} = 0$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ og $y_1 = y_2 \Rightarrow P_1 = P_2$.

$P_1 = P_2 \Rightarrow \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} = 0$ siden $x_1 = x_2$ og $y_1 = y_2$.

Oppg. 3, s. 45

$$\rho(P_1,P_2) = |x_1-x_2| + |y_1-y_2| \; ; \; P_i = (x_i,y_i) \; ; \; i=1,2.$$

Vi viser at ρ tilfredsstiller betingelsene i Def. 3.2.9.:

1. $\rho(P_1,P_2) = |x_1-x_2| + |y_1-y_2| = |x_2-x_1| + |y_2-y_1| = \rho(P_2,P_1)$.
2. $\rho(P_1,P_2) \geq 0$ siden $|\ |$ inngår i definisjonen.
3. $\rho(P_1,P_2) = 0 \Leftrightarrow |x_1-x_2| + |y_1-y_2| = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = x_2$ og $y_1 = y_2 \Leftrightarrow P_1 = P_2$.

Oppg. 5, s. 45

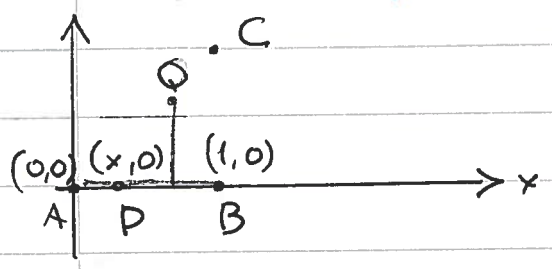
(a) I Oppg. 3.2.B beviste vi at formelen i Eks. 3.2.11:

$$\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

er en metrikk. Hvilke punkter $P=(x,y)$ i planet oppfyller betingelsen

$$\rho(A,P) + \rho(P,B) = \rho(A,B)$$

der $A = (0,0)$, $B = (1,0)$?



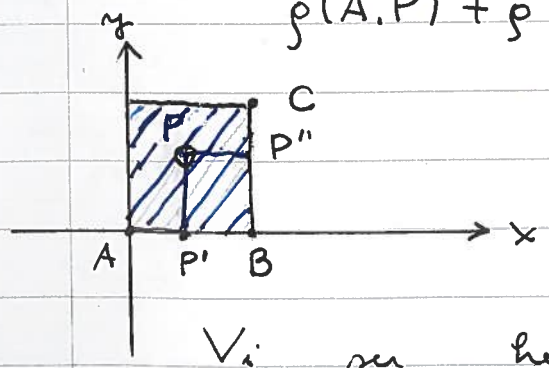
Hvis $P \in \overline{AB}$ linjestykket mellom A og B, har vi:

$$\rho(A,P) + \rho(P,B)$$
$$= |x-0| + |1-x| = 1 = \rho(A,B)$$

Hvis Q ligger utenfor x-aksen får vi $\rho(A,Q) + \rho(Q,B) = |x-0| + |y| + |y| + |1-x| > \rho(A,B)$. Altså de punkter som oppfyller betingelsen ligger på linjesegmentet $(0,1)$ på x-aksen.

(b) Vi skal finne alle punkter $P=(x,y)$ som er s.a.

$$\rho(A,P) + \rho(P,C) = \rho(A,C)$$



Vi ser at dette blir alle punkter P som ligger i kvadratet $[0,1] \times [0,1]$.

Vi ser her at

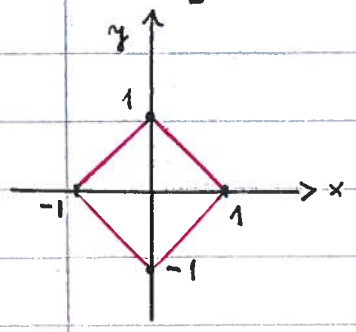
$$\rho(A,P') + \rho(P',P) + \rho(P,P'') + \rho(P'',C) = \rho(A,C).$$
$$= \rho(A,P) + \rho(P,C)$$

Oppg. # 7, s. 45

$$\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

er drosjemetrikken.

$$\rho((0,0),(x,y)) = |x| + |y| = 1$$



1. kvadrant: $x + y = 1$
2. kvadrant: $-x + y = 1$
3. kvadrant: $-x - y = 1$
4. kvadrant: $x - y = 1$

"Sirkulen" er tegnet rød.

Oppg. # 8, s. 45

$$D((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

er kvadratmetrikken.

(a)(i) $D((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$

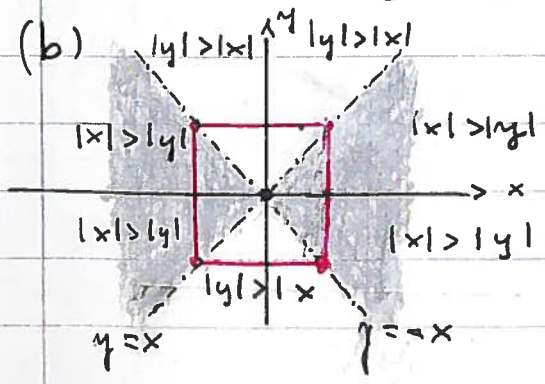
$= \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\} = D((x_2,y_2),(x_1,y_1))$

(ii) $D((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \geq 0$ p.g.a. tallverdiene.

(iii) $D((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = 0 \iff |x_1 - x_2| = 0 \wedge |y_1 - y_2| = 0$

$\iff x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$.

(b)



$|y| > |x|$ i uskravurte sektorer.

$|x| > |y|$ i skravurte sektoren

"Sirkulen" er tegnet rød.

Oppg. 10, s. 46

(i) Vi skal bevise at funksjonen $f: l \to \mathbb{R}$ for l: $y = mx + b$, gitt ved:

$$f(x,y) = x(1+|m|)$$

er en koordinatfunksjon m.h.p. drosjemetrikken.

La $P_1 = (x_1, y_1)$ og $P_2 = (x_2, y_2)$. Anta at

$$f(P_1) = f(P_2)$$

d.v.s. $x_1(1+|m|) = x_2(1+|m|)$. Da må $x_1 = x_2$

Siden $y_1 = mx_1 + b$ og $y_2 = mx_2 + b$, har vi også: $y_1 = mx_1 + b = mx_2 + b = y_2$. Altså

$$P_1 = P_2.$$

Altså er f injektiv.

La så r være et vilkårlig reelt tall.

Vi har da:

$$f\left(\frac{r}{1+|m|}, \frac{mr}{1+m} + b\right) = \frac{r}{1+|m|}(1+|m|) = r.$$

Altså er f surjektiv.

Videre har vi:

$$|f(P_1) - f(P_2)| = |x_1(1+|m|) - x_2(1+|m|)|$$

$$= |x_1 - x_2|(1+|m|) = |x_1 - x_2| + |m||x_1 - x_2|$$

$$\overset{*}{=} |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = P_1P_2.$$

(Her* benyttes at $|y_1 - y_2| = |(mx_1 + b) - (mx_2 + b)| = |m||x_1 - x_2|$.) Altså er f avstandsbevarende.

(ii) For tilfellet at linjen har ligningen

$$l: \quad x = a$$

innfører vi funksjonen: $f(a, y) = y$

Vi har da: $f(a, y_1) - f(a, y_2) = 0$

eller $y_1 - y_2 = 0$, m.a.o $f(P_1) = f(P_2) \Leftrightarrow P_1 = P_2$.

Altså er f injektiv.

Velges så $r \in \mathbb{R}$, har vi for $P = (a, r)$

$$f(P) = r.$$

Altså f er surjektiv.

Vi har til slutt: $P_1 = (a, y_1)$, $P_2 = (a, y_2)$

$$|f(P_1) - f(P_2)| = |y_1 - y_2| = |a - a| + |y_1 - y_2|$$
$$= P_1P_2.$$

M.a.o., f er også avstandsbevarende.