MA 2401 - GEOMETRI

VÅR 2013

Onsdag 27/2 - kl. 8^{15}-10^{00}

13. forelesning

HVA GJORDE VI SIST?

- Segmentkonstruksjons-teoremet. (Oppg. 18, s. 46)
- Observasjon: $P \in l$. Høyst to punkter på l kan ha samme avstand til P.
- Teorem 4.1.3 (Eksistens og entydighet av perpendikulær.)

4.2 BETINGELSER FOR TREKANT-KONGRUENS.

- Teorem 4.2.1 (ASA)
- Teorem 4.2.2 (Det motsatte av likebent-trekant-teoremet.) LBT
- Teorem 4.2.3 (AAS)
- Advarsel: ASS holder ikke generelt!
- Definisjon 4.2.4 (Rettvinklet trekant, hypotenus, katet.)
- Teorem 4.2.5 (Hypotenus-katet-teoremet)

DAGENS PROGRAM:

- Bevis for Teorem 4.2.5
- Teorem 4.2.6 (Bevis: Neste øving.)
- Teorem 4.2.7 (SSS)

4.3 TRE ULIKHETER FOR TREKANTER

- Teorem 4.3.1 (Scalene-ulikheten.)
- Teorem 4.3.2 (Trekant-ulikheten.)
- Teorem 4.3.3 (Hengsle-ulikheten.)
- Teorem 4.3.4 (Korteste avstand fra P til l.)
- Definisjon 4.3.5 (Avstand fra P til l.)
- Teorem 4.3.6 (Punktvis karakterisering av vinkelhalv.-linje.)
- Teorem 4.3.7 (Punktvis karakterisering av midtnormal.)

MA 2401 - GEOMETRI

VÅR 2013

Onsdag 6/3 - kl. 8^{15}-10^{00}

14. forelesning

HVA GJORDE VI SIST?

- Bevis for Teorem 4.2.5 (Hypotenus-katet-teoremet.)
- Teorem 4.2.6
- Teorem 4.2.7 (SSS)

4.3 TRE ULIKHETER FOR TREKANTER

- Teorem 4.3.1 (Scalene-ulikheten.)
- Teorem 4.3.2 (Trekant-ulikheten.)
- Teorem 4.3.3 (Hengsle-ulikheten.)

DAGENS PROGRAM:

- Bevis for Teorem 4.3.3 (Hengsle-ulikheten.)
- Teorem 4.3.4 (Korteste avstand fra P til ℓ.)
- Definisjon 4.3.5 (Avstand fra P til ℓ.)
- Teorem 4.3.6 (Punktvis karakterisering av vinkelhalveringstråle.)
- Teorem 4.3.7 (Punktvis karakterisering av midtnormal for segment.)
- Teorem 4.3.8 (Kontinuitet av avstand.)

4.4 ALTERNATIV-INDRE-VINKLER-TEOREMET

- Definisjon 4.4.1 (Transversal, indre vinkel, alternative indre vinkler.)
- Teorem 4.4.2 (Alternativ-indre-vinkler-teoremet.) AIVT
- Definisjon 4.4.3 (Korresponderende vinkler.)
- Korollar 4.4.4 (Korresponderende-vinkler-teoremet.)
- Korollar 4.4.5 (Ikke-alternative-indre-vinkler-teoremet.)

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

SEMESTERPRØVE I MA2401 GEOMETRI
Fredag 1. mars 2013
Tid: 55 minutter

Hjelpemidler: Gult ark A5

Oppgave 1

La $\mathbf{R}^2$ være det kartesiske plan med avstand:

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Bevis at funksjonen:

$$f(x, y) = x\sqrt{10}$$

er en koordinatfunksjon for linjen gitt ved $y = 3x + 2$ i $\mathbf{R}^2$.

(i) Vi må bevise at $f : \ell \to \mathbb{R}$ der ℓ er gitt ved $y = 3x + 2$ er en bijeksjon.

INJEKTIVITET:

Anta at $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$. D.v.s. at

$x_1\sqrt{10} - x_2\sqrt{10} = 0$

Altså $x_1 = x_2$. Videre har vi:

$y_1 = 3x_1 + 2 = 3x_2 + 2 = y_2$. Altså er:

$(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.

SURJEKTIVITET:

La $r \in \mathbb{R}$, vilkårlig. Vi velger $x = r/\sqrt{10}$ og får

$f(x, y) = f\left(\frac{r}{\sqrt{10}}, \frac{3r}{\sqrt{10}} + 2\right) = \frac{r}{\sqrt{10}} \cdot \sqrt{10} = \underline{r}$

AVSTAND:

$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| = |x_1\sqrt{10} - x_2\sqrt{10}| = |x_1 - x_2|\sqrt{10}$

$= |x_1 - x_2|\sqrt{1 + 3^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + 3^2(x_1 - x_2)^2}$

$= ((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)^{1/2}$ siden

$(y_1 - y_2)^2 = ((3x_1 + \cancel{2}) - (3x_2 + \cancel{2}))^2 = 9(x_1 - x_2)^2$

Altså: $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| = d((x_1, x_2), (y_1, y_2))$.

Oppgave 2

Bevis følgende innenfor insidens-geometri:

a) Hvis l og m er to distinkte linjer som ikke er parallelle, så har de eksakt et punkt felles.

b) Hvis P er et vilkårlig punkt så finnes det minst to distinkte linjer som har P som skjæringspunkt.

(a) Anta at $l \cap m$ inneholder to distinkte punkter P og Q. Men siden $P \neq Q$, finnes det bare en linje som har insidens med både P og Q. Altså må $l = m$, i strid med antagelsen.

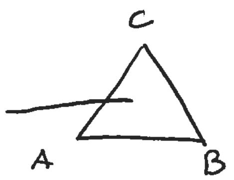
(b) I følge 3. insidens-aksiom finnes det tre ikke-kolineære punkter: A, B, C. Da er $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$ og $\overleftrightarrow{BC}$ tre distinkte linjer.

(i) Anta $P = A$. Da vil $P \in \overleftrightarrow{AB}$ og $P \in \overleftrightarrow{AC}$ og $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{AC} = \{P\}$. Analogt om $P = B$ eller $P = C$.

(ii) Anta $P \notin \{A, B, C\}$. Da vil $\overleftrightarrow{PA}$, $\overleftrightarrow{PB}$, $\overleftrightarrow{PC}$ være tre linjer som inneholder P. Kan alle tre falle sammen? Høyst to kan falle sammen – for i motsatt fall er A, B og C kolineære.

Oppgave 3 (Plan geometri):

Anta at ΔABC er en trekant og l er en linje som er slik at l ikke inneholder noe av hjørnene i trekanten. Bevis at l ikke kan skjære alle tre sidene i trekanten



Anta at l skjærer en side f.eks. $\overline{AC}$. Siden l ikke skjærer noe hjørne, må da

$A \times C$ (rel l)

Da må $B \sim A$ (rel l) eller $B \times A$ (rel l)

I det første tilfellet skjærer l ikke $\overline{BA}$

I det andre tilfellet skjærer l ikke $\overline{CB}$