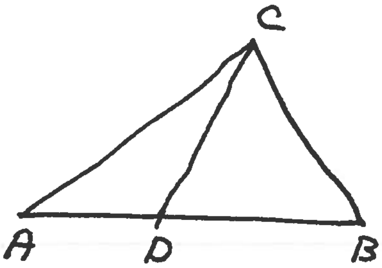
Øving 8

6.1 : 1, 2, 3
6.2 : 1, 2, 3
8.1 : 2, 3, 5
8.3 : 1, 2, 3
11.2 : 1, 2

6.1 : 1

Anta $\delta(\triangle ABC) = c$ $\forall$ trekanter $\triangle ABC$

La $\triangle ABC$ være en trekant og la $D \in \overline{AB}$ så $A * D * B$.



Thm 4.8.2 gir da at

$$
\begin{aligned}
c = \delta(\triangle ABC) &= \delta(\triangle ADC) + \delta(\triangle DBC) \\
&= c + c \\
&= 2c
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \quad c = 0$

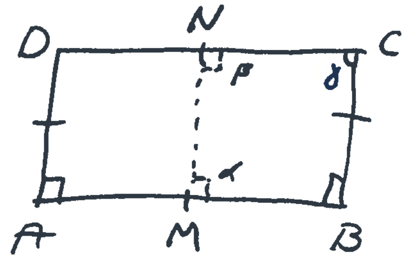
$\supset$: At i H.G, der $\delta(\triangle ABC) > 0$ $\forall \triangle ABC$ så kan ikke alle trekanter ha samme defekt. $\square$

6.1:2

Korollar 6.1.9:

$MN < BC$.

Saccheri



Base: $\overline{AB}$

Altitude: $\overline{MN}$

Height: MN

Summit: $\overline{CD}$

bevis:

Vet at $\alpha = \beta = 90$, så

$\square BMNC$ er en Lambert-firkant

$\Rightarrow MN \leq BC$ ved THM 4.8.11:4

Anta $MN = BC$. Da er $\square BMNC$ en Saccheri-firkant,

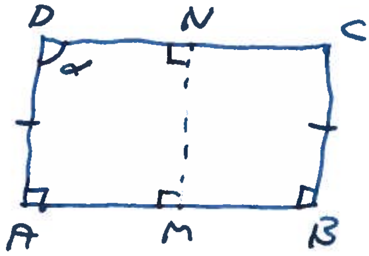
så $\gamma = \beta = 90$ ved THM 4.8.10:2.

$\urcorner$: $\square BMNC$ er et rektangel $\lightning$

$\Rightarrow MN < BC$

$\square$

6.1:3 Korollar 6.1.10 I en Saccherifirkant er $CD > AB$



bevis: ~~Vet~~ Det holder å vise at $ND > \cancel{AB}\ AM$.

$\square \cancel{AMND}$ NMAD er en Lambert-firkant, så $AM \leq ND$ ved THM 4.8.11:4

Anta $AM = ND$. Da er ~~$\square DAMN$ er~~ $\square MNDA$ en Saccheri-firkant, så $\alpha = \mu(\angle DAM) = 90$ vet THM 4.8.10:

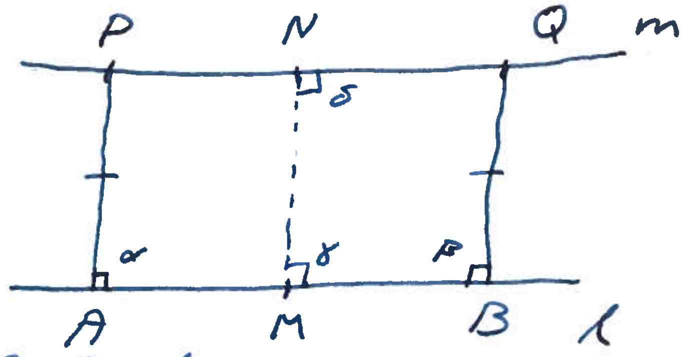
$\therefore$ $\square MNDA$ er et rektangel $\lightning$

$\therefore$ $AM < ND$

II

<u>6.2:1</u> <u>THM 6.2.3</u> l og m to linjer så $l \parallel m$.
Hvis det finnes to punkter på m som er like langt fra l, så finnes en felles perpendikulær.

<u>bevis</u>: La $l \parallel m$ og anta at $P \neq Q \in m$ er like langt fra l.



La A og B være fotpunktene på l fra h.v. P og Q. Nå er $AP = BQ$ og $\alpha = \beta = 90$, så $\square ABQP$ er en Saccheri-firkant.

La M og N være midtpunktene på h.v. $\overline{AB}$ og $\overline{PQ}$.

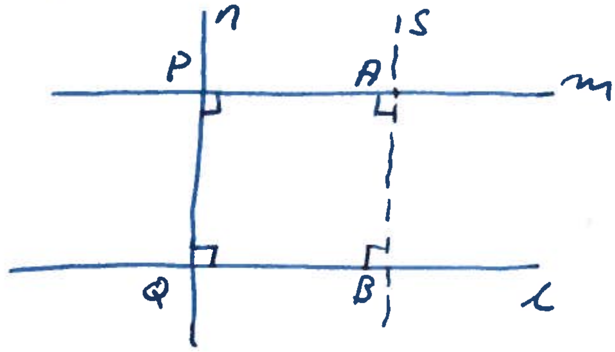
Vet da at $\gamma = \delta = 90$ fra THM 4.8.10:3.

$\therefore$: $\overleftrightarrow{MN}$ er en felles perpendikulær

$\square$

6.2.2 THM 6.2.4 Hvis $l \parallel m$ har en felles perpendikulær, så er den unik.

bevis Anta $l \parallel m$ og en linje n så $l \perp n$ og $m \perp n$.



Anta $\exists$ en linje $s \neq n$ så $l \perp s$ og $m \perp s$.

~~s kan da ikke gå gjennom P eller Q~~

Ettersom $s \neq n$ så må $s \parallel n$ (DPK).

og $\square PQBA$ er et rektangel ↯

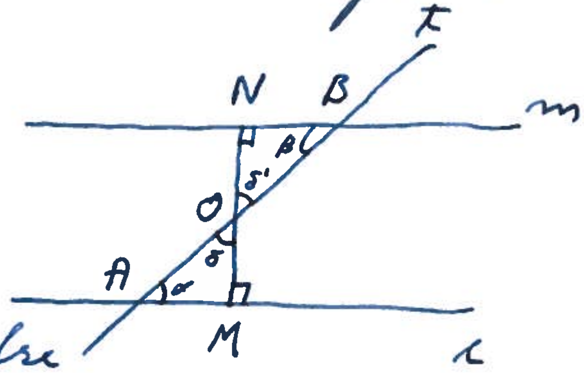
$\therefore$ n er unik

$\square$

6.2:3 La l og m være parallelle linjer med en transversal t.

Hvis l og m har en felles perpendikulær og t skjærer midtpunktet av segmentet, så er de alternerende indre vinklene kongruente.

Bevis



$\delta = \delta'$ toppvinkler

$\overline{MO} \cong \overline{ON}$ ved antagelse

$\angle AMO \cong \angle ONB$ er rette ved antagelse

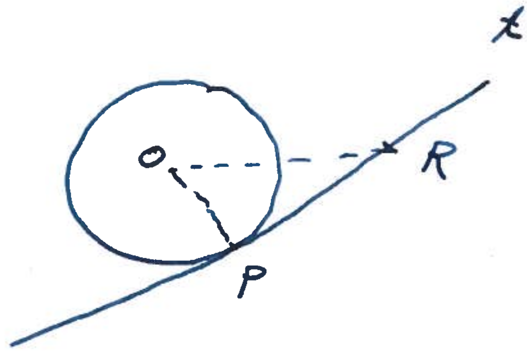
$\Rightarrow \triangle AMO \cong BNO$ (ASA)

$\Rightarrow \alpha = \beta$

II

<u>8.1.2</u> <u>THM 8.1.8</u> γ sirkel, t tangent. P tangentpunkt. Da vil alle $t \setminus \{P\}$ ligge utenfor γ

<u>bevis:</u>



II

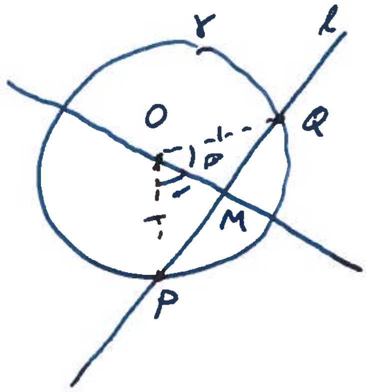
La $P \neq R \in t$, ΔOPR er rettvinklet $\Rightarrow OR > OP = r$

ɔ: R ligger utenfor γ.

8.1:3 THM 8.1.9 $\gamma = \mathcal{C}(O, r)$, l sekant $P \neq Q \in l \cap \gamma$.

Da ligger O på den perpendikulære halveringslinjen til $\overline{PQ}$.

bevis:



Hvis P, Q, O er kolineære så er P, Q antipodale og $P * O * Q$, $PO = OQ$ ∴ O er midtpunktet til $\overline{PQ}$. ok.

Anta P, Q, O ikke er kolineære og la m være vinkelhalveringsstrålen til $\angle POQ$ ~~Da~~ og la M være skjæringen med $\overline{PQ}$ (crossbar).

Nå er $PO = r = OQ$, $\alpha = \beta$ og $\overline{OM}$ er felles, så $\triangle POM \cong \triangle QOM$ (SAS).

∴ $PM = QM$ og $\angle PMO \cong \angle QMO$.

Ettersom disse vinklene også er et lineært par, må de begge være rette. Altså,

$\overleftrightarrow{OM}$ er den perpendikulære halveringslinjen til $\overline{PQ}$.

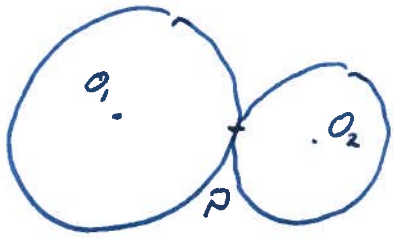
II

<u>8.1:5</u> <u>THM 8.1.15</u> $\gamma_1 = C(O_1, r_1)$, $\gamma_2 = C(O_2, r_2)$ er tangente ved P. Da er $O_1 \neq O_2$, O_1, O_2, P er kolineære og sirklene har en felles tangent ved P.

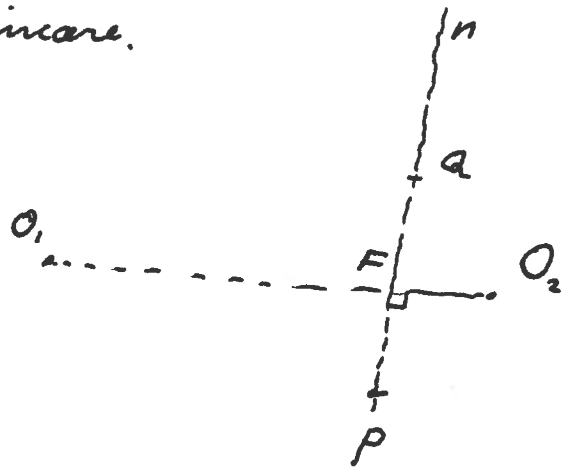
<u>bevis</u> Anta $O_1 = O_2$. Ettersom $P \in \gamma_1 \cap \gamma_2$ så er

$$r_1 = O_1P = O_2P = r_2$$

⊃: $\gamma_1 = \gamma_2$ ↯ ⊃: $O_1 \neq O_2$ ok.



Anta nå at O_1, O_2, P ikke er kolineære.
Nedfell en normal, n, fra P til $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ og kall fotpunktet for F.
Avsett et punkt Q på n så $P * F * Q$ og $FQ = PF$.
Ved SAS er $\Delta O_1FQ \cong \Delta O_1FP$, så



$$r_1 = O_1P = O_1Q$$

⊃: $Q \in \gamma_1$.

På samme måte kan det vises at $Q \in \gamma_2$, så

$$P \neq Q \in \gamma_1 \cap \gamma_2 \quad ↯$$

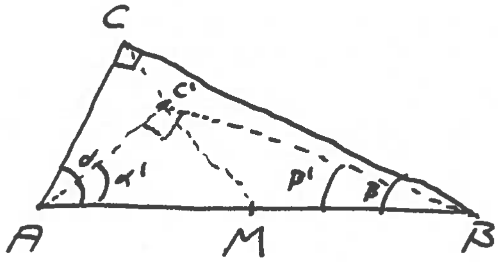
⊃: O_1, O_2, P er kolineære ∎

La t være normalen til $\overleftrightarrow{O_1P}$ i punktet P.
Ved THM 8.1.7 er t en tangent til γ_1 i P.
Ettersom O_1, O_2, P er kolineære, så er $\overleftrightarrow{O_2P} = \overleftrightarrow{O_1P}$
og ved unikhet av normaler er t også normalen til $\overleftrightarrow{O_2P}$ i P. Ved THM 8.1.7 er t en tangent til γ_2 i P.

$\blacksquare$

<u>8.3:1</u> <u>THM 8.3.3</u>: Trekant $\triangle ABC$, M midtpunktet på $\overline{AB}$. Hvis $\angle ACB$ er rett, så er $AM = MC$

<u>bevis</u>:



La $\triangle ABC$ være en trekant der $\angle ACB$ er rett. La M være midtpunktet på $\overline{AB}$

Anta først at $AM < MC$.

Avsett C' på $\overrightarrow{MC}$ sa $MC' = AM$.

THM 8.3.1 gir da at $\angle AC'B$ er rett.

La $\alpha = \mu(\angle BAC)$, $\alpha' = \mu(\angle BAC')$, $\beta = \mu(\angle ABC)$, $\beta' = \mu(\angle ABC')$

Ettersom C' er i det indre av $\angle BAC$ og $\angle ABC$, så er $\alpha' < \alpha$ og $\beta' < \beta$.

Ved vinkelsum av trekanter er

$$90 = \alpha' + \beta' < \alpha + \beta = 90 \quad \lightning$$

På samme måte kan det vises at $AM \ngtr MC$.

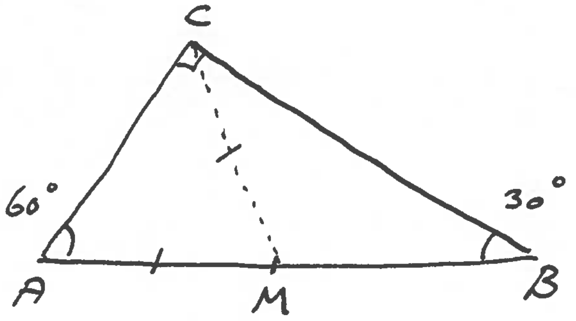
Altså må $AM = MC$.

II

8.3.2 THM 8.3.5 (30-60-90). Hvis trekanten ΔABC har vinkler $30°, 60°, 90°$, så er siden motstående $30°$ halvparten så lang som hypotenusen.

bevis:

La ΔABC være en trekant der $\angle ACB$ er rett, $m(BAC) = 60$, $m(\angle ABC) = 30$. Må vise at $2AC = AB$.



La M være midtpunktet på $\overline{AB}$.

Vet da fra THM 8.3.3 at $AM = MC$.

Ved LTT er $m(\angle ACM) = 60$ og ved vinkelsum av trekanter er også $m(\angle AMC) = 180 - 60 - 60 = 60$.

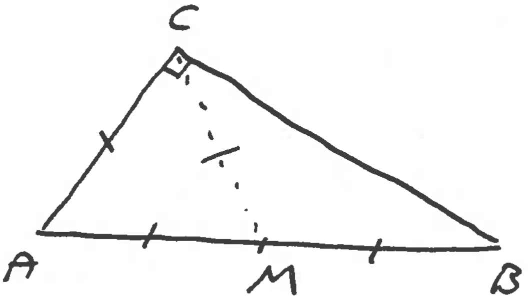
Dermed er $\Delta AMC \sim \Delta MCA$ med $r = 1$

$):\quad AC = AM = \frac{1}{2} AB$ Π

8.3.3 THM 8.3.6 (Motsatt av 30-60-90)

Hvis ΔABC er rettvinklet og det ene katetet er halve lengden av hypotenusen, så har trekanten vinkler på 30-60-90

bevis: La ΔABC være en trekant der $\angle ACB$ er rett og $AC = \frac{1}{2}AB$. La M være midtpunktet på $\overline{AB}$.

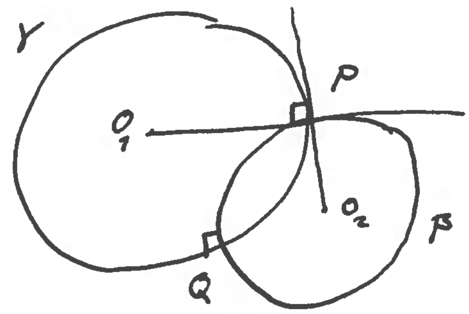


Da er $AC = AM = MB$.

Ved THM 8.3.3 er også $MC = AM$.

Ved SSS er $\Delta AMC \cong \Delta MCA$, så alle tre vinkler i ΔAMC er kongruente. Altså er $m(\angle CAM) = \frac{180}{3} = 60$, som igjen gir at $m(\angle ABC) = 180 - 90 - 60 = 30$

11.2:1 Anta γ og β er perpendikulære Euklidske sirkler som krysser hverandre i P og Q.
Vis at tangentlinjene til β i P og Q går gjennom sentrum til γ. Konkluder at sentrum til γ ligger utenfor β.



Bevis:

La $\gamma = C(O_1, r_1)$

og $\beta = C(O_2, r_2)$

~~La $t = \overleftrightarrow{O_1P}$.~~

~~og $s = \overleftrightarrow{O_2P}$~~

~~Tangenten til β i P er normalen til s i P.~~
~~Ettersom $\gamma \perp \beta$ er tangenten til γ i P vinkelrett med tangenten til β i P. $\therefore$ Tangenten til β i P er t.~~

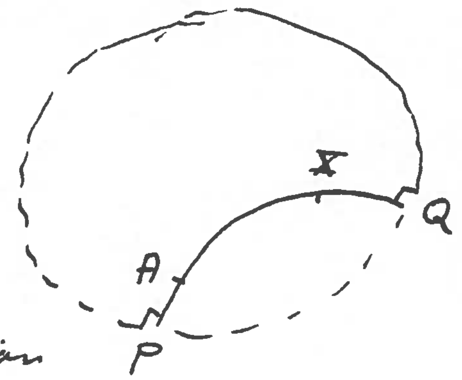
La t_γ være tangenten til γ i P.
La t_β —— " —— β i P.
Da er $t_\gamma \perp \overleftrightarrow{O_1P}$ og $t_\beta \perp \overleftrightarrow{O_2P}$.
Ettersom $\gamma \perp \beta$ så er $t_\gamma \perp t_\beta$.
Men nå er både $t_\beta \perp t_\gamma$ og $\overleftrightarrow{O_1P} \perp t_\gamma$ begge i P, så $t_\beta = \overleftrightarrow{O_1P}$.
Altså, O_1 ligger på tangenten til β i P.
(tangenten i Q er analogt. Ettersom $P \neq O_1 \in t_\beta$, ligger O_1 utenfor β)
II

<u>11.2:2</u>

$$f : m \to \mathbb{R}, \quad f(X) = \ln([AX, PQ])$$

der $[AX, PQ] = \dfrac{AP \cdot XQ}{AQ \cdot XP}$

er en koordinatfunksjon.



<u>bevis</u>: Må vise at f er en bijeksjon og at

$$|f(X) - f(Y)| = d(X, Y)$$

der

$$d(X, Y) = |\ln([XY, PQ])|.$$

Det siste først:

$$|f(X) - f(Y)| = |\ln([AX, PQ]) - \ln([AY, PQ])|$$

$$= \left|\ln\left(\frac{[AX, PQ]}{[AY, PQ]}\right)\right|$$

$$= \left|\ln\left(\frac{\cancel{AP} \cdot XQ \,/\, \cancel{AQ} \cdot XP}{\cancel{AP} \cdot YQ \,/\, \cancel{AQ} \cdot YP}\right)\right| = \left|\ln\left(\frac{XQ \cdot YP}{YQ \cdot XP}\right)\right|$$

$$= |\ln([XY, PQ])| = d(X, Y) \qquad \underline{\text{ok!}}$$

Injektiv:

Såfremt d er en metrikk så ~~f~~ vil $f(X) = f(Y)$ medføre

$$0 = |f(X) - f(Y)| = d(X, Y)$$

$$\Rightarrow X = Y$$

ok!

Surjektiv:

$$\frac{AP \cdot XQ}{AQ \cdot XP} = \text{konst} \cdot \frac{XQ}{XP}$$

går mot uendelig ~~[illegible]~~ når X er nær P

og går mot 0 når X er nær Q.

Dermed vil $f(X) \to +\infty$ når X er nær P

og $f(X) \to -\infty$ når X er nær Q.

Ettersom f er kontinuerlig vil f ta alle verdier på $\mathbb{R}$. $\therefore$ f er surjektiv

$\blacksquare$