(A)

ØVING 7, V2013

LØSNING (Innlev. 24/4)

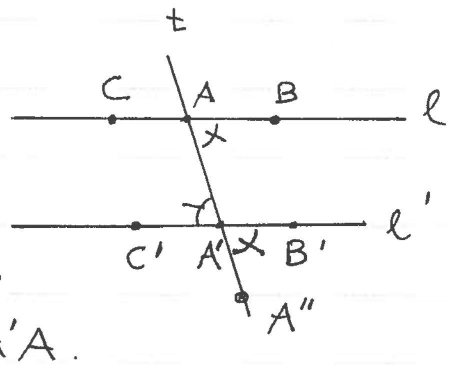
5.1
(s.109) Oppg. 1:

Vi har følgende

TEOREM (Det motsatte av korresponderende-vinkel-teoremet.) (Se: Cor. 4.4.4, s83)

Hvis ℓ og ℓ' er to linjer som er parallelle, t en transversal, så vil de korresponderende vinkler være kongruente.

BEVIS:



Siden vi nå er i euklidsk geometri gjelder MAIVT. Altså:

$$\ell \parallel \ell' \Rightarrow \angle BAA' \cong \angle C'A'A.$$

Men $\angle C'A'A$ og $\angle B'A'A''$ utgjør et lineært par, altså har vi:

$$\angle BAA' \cong \angle C'A'A \cong \angle B'A'A''. \quad \square$$

Oppg. 2:

Vi skal bevise følgende:

TEOREM 5.1.10 (Egenskaper v. euklidsk parallellogr.)

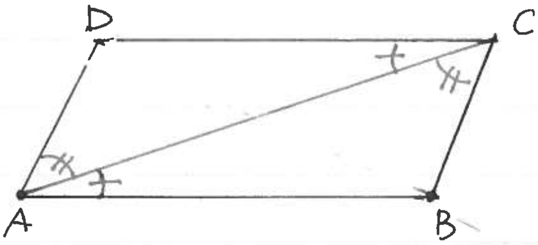
$\square ABCD$ antaes å være et parallellogram.

Da gjelder:

1. $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.
2. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ og $\overline{BC} \cong \overline{DA}$
3. $\angle DA \cong \angle BCD$ og $\angle ABC \cong \angle CDA$.
4. Diagonalene halverer hverandre.

(ØVING 7, forts.)

BEVIS:



1. Siden vi er i euklidsk geometri og vi har at $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, gir MAIVT at:

$$\angle BAC \cong \angle DCA$$

Siden vi også antar at $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{DA}$, gir MAIVT at

$$\angle BCA \cong \angle DAC$$

ASA-kriteriet gir dermed at:

$$\triangle ABC \cong \triangle CDA.$$

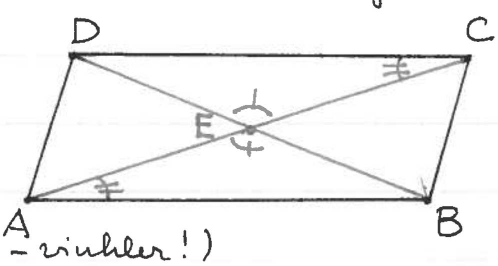
Ved å trekke den andre diagonalen $\overline{BD}$ får vi på samme måte at:

$$\triangle ABD \cong \triangle CDB.$$

2. Siden $\triangle ABC \cong \triangle CDA$, får vi spesielt: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. Ut fra $\triangle ABD \cong \triangle CDB$ får vi på samme måte at $\overline{BC} \cong \overline{DA}$.

3. Kongruensen $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ gir spesielt $\angle ABC \cong \angle CDA$. Videre gir: $\triangle ABD \cong \triangle CDB$ at $\angle DAB \cong \angle BCD$.

4. Fra teorien har vi at diagonalene skjærer hverandre i et punkt E. Siden $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\angle BAE \cong \angle DCE$ og $\angle AEB \cong \angle CED$ (topp-vinkler!)

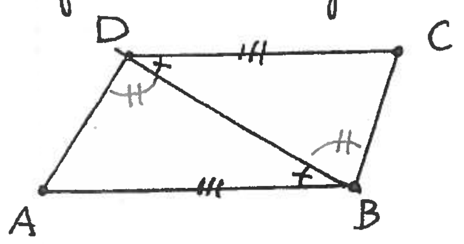


har vi $\triangle ABE \cong \triangle CDE$, får vi $\overline{BE} \cong \overline{DE}$ og $\overline{AE} \cong \overline{CE}$. Altså halverer diagonalene hverandre.

(ØVING 7, forts.)

Oppg. 3:

Vi antar at $\square ABCD$ er et kvadrilateral der $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ og $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, og skal bevise at $\square ABCD$ er et parallellogram.



Vi må altså bevise at $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$.

Fra det motsatte av AIVT får vi at $\angle ABD \cong \angle CDB$ siden $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$. Videre har vi $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ og $\overline{BD} \cong \overline{DB}$. Altså gir SAS at:

$$\triangle ABD \cong \triangle CDB$$

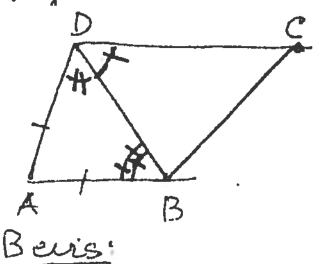
Av dette følger spesielt at:

$$\angle ADB \cong \angle CBD$$

I følge AIVT har vi dermed at:

$$\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}. \qquad \square$$

Oppg. 4:



Vi er gitt at $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, $AB = AD$, og skal vise at $\angle ADB \cong \angle BDC$.

Bevis:

Fra MAIVT får vi at $\angle BDC \cong \angle ABD$ siden $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$. Men da $AB = AD$ er $\triangle BAD$ likebent, vil vinklene ved grunnlinja $\overline{BD}$ være kongruente, dvs. $\angle ABD \cong \angle ADB$. Altså $\angle BDC \cong \angle ADB$. $\square$

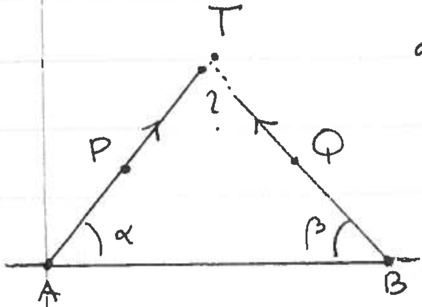
Altså er $\overrightarrow{DB}$ halveringsstrålen for $\angle ADC$.

D

(ØVING 7, forts.)

Oppg. 10:

Vi antar at α, β, γ er positive tall s.a. $\alpha+\beta+\gamma = 180°$. Vi avsetter linjesegmentet AB vilkårlig. Så avsettes vi dere to stråler $\overrightarrow{AP}$ og $\overrightarrow{AQ}$ s.a. $P \sim Q$ (rel $\overleftrightarrow{AB}$) og s.a.



$\mu(\angle BAP) = \alpha$ og $\mu(\angle ABQ) = \beta$. Siden $\alpha + \beta < 180°$ skjærer disse strålene hverandre i et punkt T på samme side av $\overleftrightarrow{AB}$ som P og Q – ut fra Euklid V. $\sigma(\triangle ABT) = 180°$, altså må $\mu(\angle ATB) = 180 - \alpha - \beta = \gamma$. $\square$

5.3

(s.114) Oppg. 1:

Vi skal bevise

KOROLLAR 5.3.2:

Hvis $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ finnes det et reelt tall $r > 0$ s.a.

$$DE = r \cdot AB, \quad DF = r \cdot AC \text{ og } EF = r \cdot BC$$

BEVIS:

Fra Teorem har vi:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}, \quad \frac{BC}{BA} = \frac{EF}{ED}, \quad \frac{CA}{CB} = \frac{FD}{FE}$$

(De to siste likheter er ikke med i teoremet, men følger helt analogt med den første!)

Enkel algebra gir:

(E)

(ØVING 7, forts.)

$$\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC} \quad \text{som gir:}$$

$$r \overset{\text{def}}{=} \frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC}$$

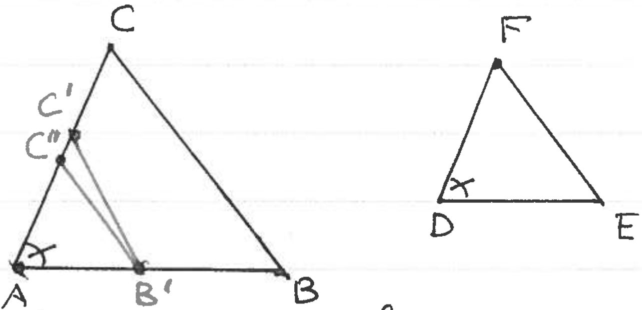
Oppg. 2:

Vi skal bevise:

TEOREM 5.3.3 (SAS for formlikhet.)

Hvis $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er s.a. $\angle CAB \cong \angle FDE$ og $AB/AC = DE/DF$, da vil $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

BEVIS:



Vi kan UTAG anta at $AB > DE$. (Hvis $AB = DE$, gir antagelsen at $AC = DF$ og vi har

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

ut fra SAS. Vi avsetter da B' s.a. $A * B' * B$ og $AB' = DE$) $AB > DE$ medfører $AC > DF$. Vi avsetter da C' s.a. $A * C' * C$ og $AC' = DF$. Ut fra SAS har vi da:

$$\triangle AB'C' \cong \triangle DEF$$

Vi avsetter en parallell til $\overleftrightarrow{BC}$ gjennom B'. Denne må skjære AC i et punkt C''. Da blir $\triangle AB'C'' \sim \triangle ABC$ og ut fra Teorem 5.3.1 har vi da:

$$AC''/AC = AB'/AB$$

og dessuten $AC'/AC = AB'/AB$ ut fra antagelsen, siden $AC' = DF$ og $AB' = DE$. Altså: $AC' = AC''$.

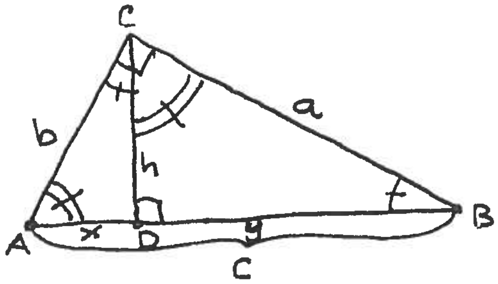
(ØVING 7, forts.)

Altså er $C' = C''$. Dermed har vi:

$$\underline{\triangle DEF \sim \triangle AB'C' = \triangle ABC'' \sim \triangle ABC.}$$

5.4
(s. 116) **Oppg. 1:**

For de neste to oppgavene benyttes Fig 5.10 s.115:



Oppgave 5.4.1 Vis at $h = \sqrt{xy}$. – Dette er T. 5.4.3.
Dette følger uten videre da $\frac{x}{h} = \frac{h}{y}$.

Oppgave 5.4.2 Vis at $b = \sqrt{cx}$ (og $a = \sqrt{cy}$).

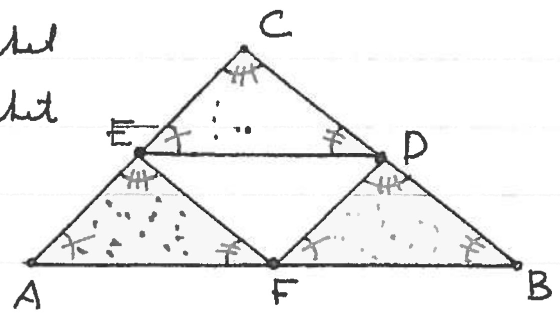
Bevis.

$$cx = (x+y)x = x^2 + yx \underset{T5.4.3}{=} x^2 + h^2 = b^2$$

slik at $b = \sqrt{cx}$.

$$(cy = (x+y)y = xy + y^2 = h^2 + y^2 = a^2) \qquad \square$$

5.6
(s. 127) **Oppg. 2:**



Her er D midtpunktet på $\overline{BC}$, E er midtpunktet på $\overline{CA}$ og F er midtpunktet på $\overline{AB}$

(a) Vi skal bevise

at $\triangle EDC \sim \triangle ABC$ og at

(ØVING 7, forts.)

sideforholdet er 2.

Vi benytter her SAS for formlikhet (Teorem 5.3.3, s. 113). Ut fra konstruksjonen har vi nemlig:

$\angle ECD \cong \angle ACB$,

$CA/CE = 2 = CB/CD$. Altså:

$\triangle EDC \sim \triangle ABC$.

(b) Vi skal så bevise at

$\triangle EDC \cong \triangle AFE \cong \triangle FBD \cong \triangle DEF$.

Helt analogt med argumentet i (a) følger det at $\triangle AFE \sim \triangle ABC$. og at $\triangle FBD \sim \triangle ABC$. Siden spesielt $\angle EAF \cong \angle CED$ og $\angle AEF \sim \angle ECD$ og $\overline{AE} \cong \overline{EC}$ følger det fra ASA at

(*) $\triangle AFE \cong \triangle EDC$.

Helt analogt bevises at

(**) $\triangle FBD \cong \triangle EDC$.

Ut fra Korollar 4.4.4 (Koresp. vinkel-teorem.) får vi at $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{ED}$ og at $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{FD}$. Altså er $\square AFDE$ et parallellogram. Ut fra Teorem 5.1.10 er da $\overline{AE} \cong \overline{FD}$ og $\overline{DE} \cong \overline{FA}$. (Av samme grunn er $\square FBDE$ et parallellogram og $\overline{FE} \cong \overline{BD}$.) Vi har dessuten $\overline{FE} \cong \overline{EF}$. Fra SSS følger da at (***) $\triangle DEF \cong \triangle AFE$. Tilsammen gir (*), (**) og (***):

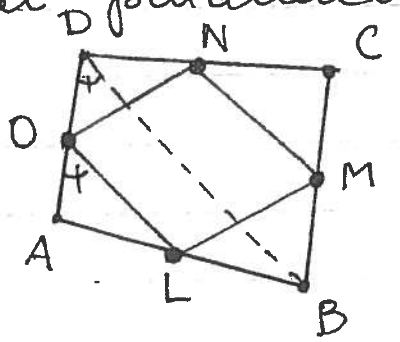
$\triangle EDC \cong \triangle AFE \cong \triangle FBD \cong \triangle DEF$. $\square$

Ⓗ

(ØVING 7, forts.)

Oppg. 4:

Vi antar at $\square ABCD$ er et vilkårlig kvadrilateral der L betegner midtpunktet på $\overline{AB}$, M midtpunktet på $\overline{BC}$, N midtpunktet på $\overline{CD}$ og O midtpunktet på $\overline{DA}$. Vi skal bevise at $\square LMNO$ er et parallellogram.



Vi skal bevise at $\overleftrightarrow{OL} \parallel \overleftrightarrow{MN}$ ved å bevise at $\overleftrightarrow{OL} \parallel \overleftrightarrow{BD}$ og $\overleftrightarrow{BD} \parallel \overleftrightarrow{MN}$.

Siden $AL = \frac{1}{2}AB$ og $AO = \frac{1}{2}AD$ og $\angle OAL \cong \angle DAB$, følger det fra Teorem 5.3.3 (SAS for formlikhet) at $\triangle ALO \sim \triangle ABD$. Spesielt er $\angle AOL \cong \angle ADB$. Fra AIVT følger det at:

$$\overleftrightarrow{OL} \parallel \overleftrightarrow{BD}.$$

Helt analogt får vi at $\overleftrightarrow{NM} \parallel \overleftrightarrow{BD}$, og dermed blir:

$$\overleftrightarrow{OL} \parallel \overleftrightarrow{MN}.$$

Ved å erstatte diagonalen $\overline{DB}$ med diagonalen $\overline{AC}$ beviser vi på tilsvarende måte at

$$\overleftrightarrow{LM} \parallel \overleftrightarrow{NO}.$$

SPØRSMÅL:

Er beviset ovenfor avhengig av at $\square ABCD$ er konvekst?