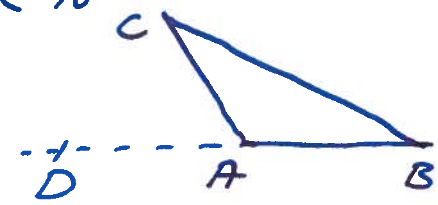
Øving 4 innl. 13. mars

4.1 : 1
4.2 : 2, 3, 5
4.3 : 4, 5, 6, 7, 8
4.4 : 1, 2, 3
4.5 : 1, 2

4.1:1 Trekant $\triangle ABC$. Anta $90 \leq m(\angle BAC) < 180$

Må vise $m(\angle ABC), m(\angle ACB) < 90$



La $D \in \overrightarrow{BA}$ så $D * A * B$

Da er $\angle DAC$ og $\angle BAC$ et lineært par, så

$$m(\angle DAC) = 180 - m(\angle BAC)$$
$$\leq 90.$$

$\angle DAC$ er en ytre vinkel for $\triangle ABC$ så

$$m(\angle ABC) < m(\angle DAC) \leq 90 \quad \text{og}$$
$$m(\angle ACB) < m(\angle DAC) \leq 90 \quad (\text{THM. } 4.12)$$

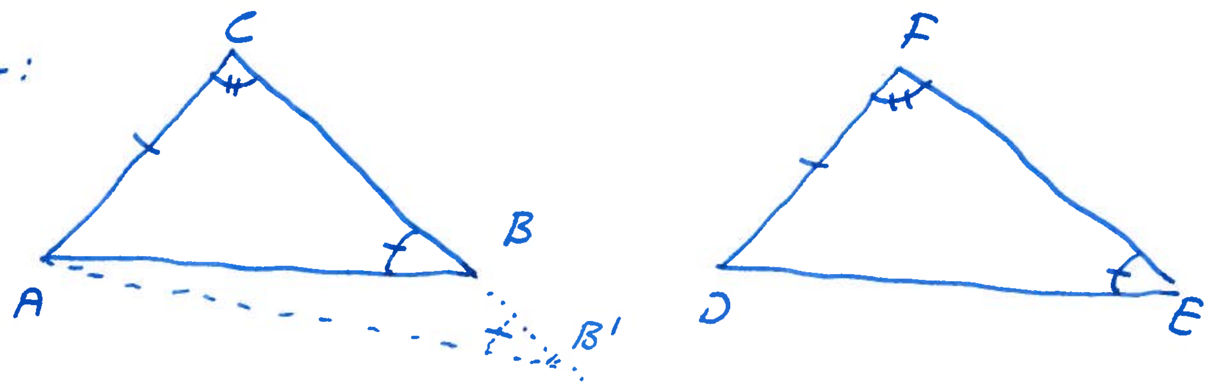
): $\angle ABC$ og $\angle ACB$ er spisse vinkler

$\square$

4.2:2 THM 4.2.3 (AAS)

ΔABC, ΔDEF, $\angle ABC \cong \angle DEF$, $\angle BCA \cong \angle EFD$ og $\overline{AC} \cong \overline{DF}$. Da er $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

bevis:



La $B' \in \overrightarrow{CB}$ så $\overline{CB'} \cong \overline{FE}$

Da er $\Delta AB'C \cong \Delta DEF$ (SAS), så

$$\angle AB'C \cong \angle DEF \cong \angle ABC.$$

i) Hvis $C * B * B'$ så er $\angle AB'C$ en ytre vinkel for $\Delta AB'B$, men

$$m(\angle ABC) = m(\angle AB'B) \quad ↯ \quad \text{(THM. 4.1.2.)}$$

ii) Hvis $C * B' * B$ så er $\angle AB'C$ en ytre vinkel for $\Delta ABB'$, men

$$m(\angle AB'C) = m(\angle ABB) \quad ↯ \quad \text{(THM. 4.1.2)}$$

): $B = B' \Rightarrow \Delta DEF \cong \Delta AB'C \cong \Delta ABC$

π

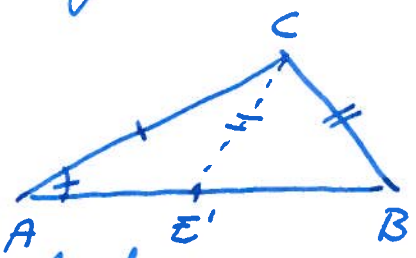
4.2:3 ΔABC, ΔDEF, $\angle BAC \cong \angle EDF$, $AC = DF$ og $CB = FE$.

Vis at $\angle ABC$ og $\angle DEF$ er kongruente eller supplementære.

bevis: Om nödvendig, bytt navn på trekantene så $DE \leq AB$.

Hvis $DE = AB$ så er $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ så $\angle ABC \cong \angle DEF$ (SAS).

Anta $DE < AB$. Da finnes et punkt $E' \in \overline{AB}$ så $AE' = DE$. Altså, $A * E' * B$ og $\Delta AE'C \cong \Delta DEF$ (SAS)



$\therefore$ $\overline{E'C} \cong \overline{EF} \cong \overline{BC}$

$\Rightarrow$ $\Delta E'BC$ er en likesidet trekant

$\Rightarrow$ $\angle CE'B \cong \angle E'BC$ (THM. 3.6.5)

Vi har at $\angle AE'C$ og $\angle CE'B$ er et lineært par, så $\mu(\angle AE'C) + \mu(\angle CE'B) = 180$.

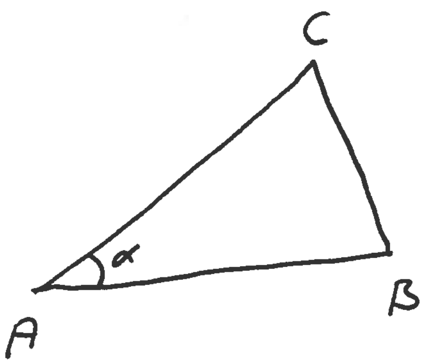
Dermed er

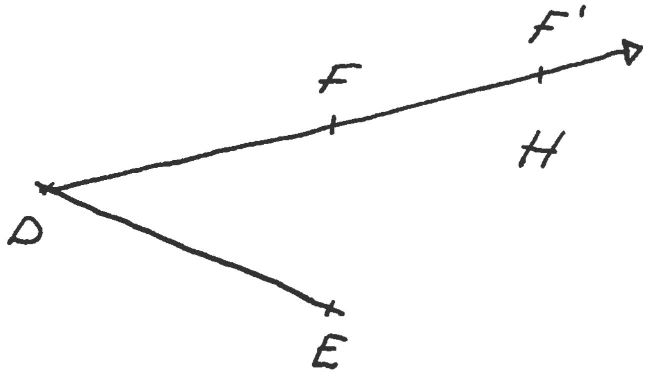
$$\begin{aligned}
&\mu(\angle ABC) + \mu(\angle DEF) \\
&= \mu(\angle E'BC) + \mu(\angle AE'C) \\
&= \mu(\angle CE'B) + \mu(AE'C) \\
&= 180
\end{aligned}$$

//

4.2.5 Thm 4.2.6: $\triangle ABC$ trekant. $\overline{DE}$ segment så $\overline{DE} \cong \overline{AB}$. H et halvplan gitt av $\overleftrightarrow{DE}$. Da $\exists!$ punkt $F \in H$ så $\triangle DEF \cong \triangle ABC$.

bevis:





Eksistens:

La $\alpha = \mu(\angle BAC)$. La $F' \in H$ så $\mu(\angle EDF') = \alpha$. La $F \in \overrightarrow{DF'}$ så $\overline{DF} \cong \overline{AC}$.
Da er $\triangle DEF \cong \triangle ABC$ (SAS)

☒

Unikhet: Anta $G \in H$ så $\triangle DEG \cong \triangle ABC \cong \triangle DEF$.
Ettersom $G \in H$ og $\angle \cancel{BAC}\,EDF \cong \angle EDG$ så er $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DF}$. (gradskivepost.)
Ettersom $\cancel{\overline{DG} \cong \overline{BA}}$ $DG = AB = DF$
så er $G = F$ (punktkonstruksjonspost.).

☒

4.3.4 Hvis A, B, C er tre punkter, så er

$$AB + BC \geq AC$$

bevis: Hvis A, B, C er ikkekolineære, så er $AB + BC > AC \geq AC$ (THM 4.3.2) ok.

Anta derfor at A, B, C er kolineære.

i) $A * B * C$:

$$AB + BC = AC \geq AC \qquad \text{ok}$$

ii) $A * C * B$:

$$AC + CB = AB$$

$$\Rightarrow \quad AB + BC = AC + 2BC \geq AC \qquad \text{ok}$$

iii) $B * A * C$:

$$BA + AC = BC$$

$$\Rightarrow \quad AB + BC = 2BC - AC$$

$$\geq 2AC - AC \qquad \text{fordi } BC > AC$$

$$= AC \qquad \text{ok}$$

Hvis to punkter er like: $A = B$:

$$AB + BC = BC = AC \qquad \text{ok}$$

$\#$

4.3.5 Bruk Hengselteoremet for å bevise SSS.

La $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ være to trekanter så.

$AB = DE$, $BC = EF$ og $AC = DF$

(RAA) Anta $\mu(\angle BAC) < \mu(\angle EDF)$.

da er $BC < EF$ (THM 4.3.3) ↯

(RAA) Anta $\mu(\angle EDF) < \mu(\angle BAC)$

da er $EF < BC$ (THM 4.3.3) ↯

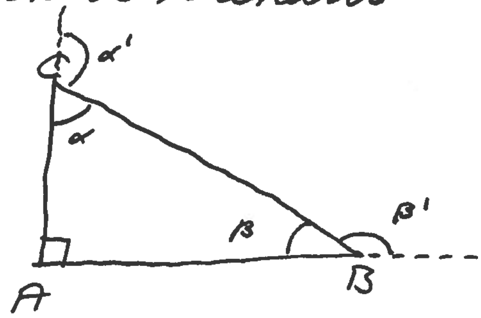
Altså må $\mu(\angle EDF) = \mu(\angle BAC)$

og $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ved SAS

II

4.3.6 Hypotenusen er den lengste siden i en rettvinklet trekant.

__bevis__: La ΔABC være en rettvinklet trekant der $m(\angle BAC) = 90$.



La $\alpha = m(\angle ACB)$ og
$\beta = m(\angle ABC)$

La α' og β' være fjerne ytre vinkler til $\angle BAC$.

Da er $\beta + \beta' = 180 = \alpha + \alpha'$ og $\beta' > 90$ og $\alpha' > 90$.

ↄ: $\beta = 180 - \beta' < 90$ og $\alpha = 180 - \alpha' < 90$.

Ved Scalene-ulikheten gir dermed at

$$m(\angle BAC) = 90 > \beta = m(\angle ABC) \Rightarrow BC > AC$$

$$m(\angle BAC) = 90 > \alpha = m(\angle ACB) \Rightarrow BC > AB$$

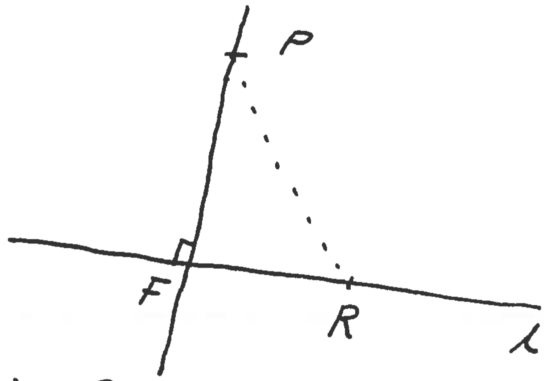
ↄ: Hypotenusen, $\overline{BC}$, er den lengste siden

II

4.3.7 THM 4.3.4: l linje, $P \notin l$ punkt.

F punktet på l så. $l \perp \overleftrightarrow{PF}$. La $R \in l$, $R \neq F$.

Da er $PR > PF$.



bevis:

Trekanten $\triangle FRP$ er rettvinklet fordi $m(\angle RFP) = 90$.

Fra oppg. 4.3.6 har vi at $PR > PF$

$\square$

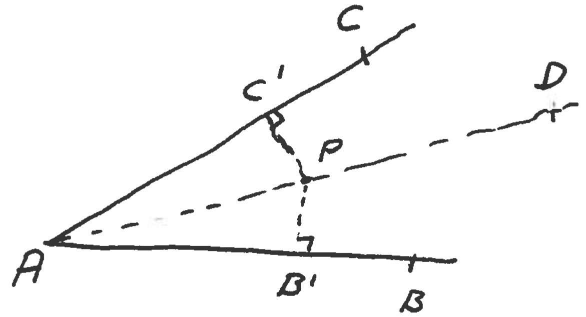
4.3.8 THM 4.3.6: A, B, C ikkekolin.

P et punkt i det indre av $\angle BAC$. ~~Da er~~
La $\overrightarrow{AD}$ være vinkelhalveringsstrålen til $\angle BAC$. Da er

$$P \in \overrightarrow{AD} \iff d(P, \overleftrightarrow{AB}) = d(P, \overleftrightarrow{AC})$$

bevis $\Rightarrow$: La $P \in \overrightarrow{AD}$. Hvis $P = A$ så er

$d(P, \overleftrightarrow{AB}) = 0 = d(P, \overleftrightarrow{AC})$ ok



Hvis $P \neq A$ ~~så er~~ la B' og C' være henholdsvis fotpunktene på $\overleftrightarrow{AB}$ og $\overleftrightarrow{AC}$.
Da er $\angle AB'P \cong \angle AC'P$, $\angle B'AP \cong \angle C'AP$
og $\overline{AP} \cong \overline{AP}$ så $\triangle AB'P \cong \triangle AC'P$ (AAS)

$\therefore$ $d(P, \overleftrightarrow{AB}) = PB' = PC' = d(P, \overleftrightarrow{AC})$ ☒

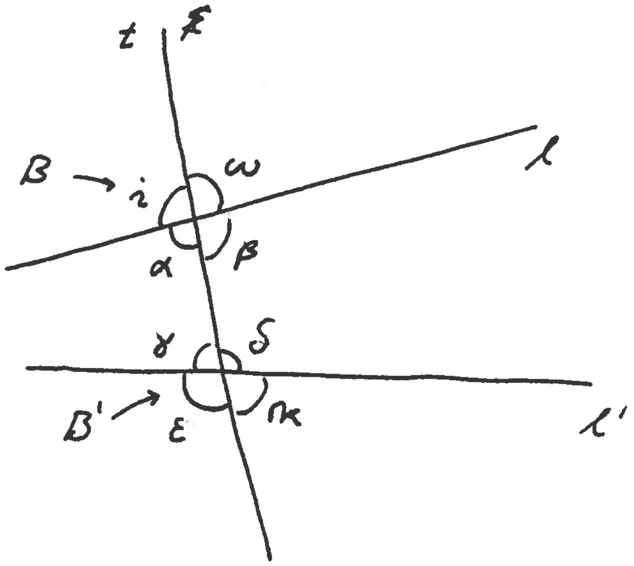
bevis $\Leftarrow$: Anta $d(P, \overleftrightarrow{AB}) = d(P, \overleftrightarrow{AC})$

$\therefore$ $PB' = PC'$ der B' og C' er som over.
I tillegg er $AP = AP$ og $\angle AB'P \cong \angle AC'P$ er rette

$\Rightarrow \triangle AB'P \cong \triangle AC'P$ (THM 4.2.5)

$\Rightarrow \angle B'AP \cong \angle C'AP \Rightarrow P \in \overrightarrow{AD}$ fordi P er i det indre av $\angle BAC$ og ved unikhet av vinkelh.st.

☒



$l \neq l'$. Linjen t er en <u>transversal</u> hvis $\exists$
$B \in t \cap l$, $B' \in t \cap l'$ og $B \neq B'$.

Vinklene $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ er <u>indre vinkler</u> for l, l' med transv. t

Parene $\{\alpha, \delta\}$ og $\{\beta, \gamma\}$ er <u>alternerende indre vinkler</u>

Parene $\{\alpha, \varepsilon\}$, $\{\beta, \kappa\}$, $\{\gamma, i\}$, $\{\delta, \omega\}$ er <u>korresponderende vinkler</u>

<u>THM 4.4.2</u> Alternerende indre vinkel-teoremet (AIA)
Hvis $\alpha = \delta$ eller $\beta = \gamma$ så er $l \parallel l'$

<u>4.4.1</u> Korollar 4.4.4: Hvis korresponderende vinkler er kongruente, så er $l \parallel l'$

<u>bevis</u>: Anta $\alpha = \varepsilon$. Vi har at ε og δ er toppvinkler, så $\varepsilon = \delta$. Dermed er $\alpha = \delta$ så $l \parallel l'$ ved AIA

II

<u>4.4.2</u> Korollar 4.4.5: Hvis to ikkealternerende indre vinkler er supplementære, så er $l \parallel l'$.

<u>bevis</u>: Anta $\alpha + \gamma = 180$. Vi har at γ og δ er et lineært par så $\gamma + \delta = 180$. Dermed er

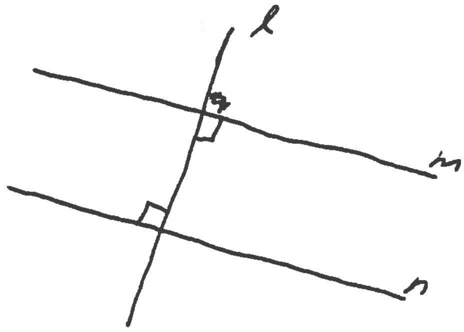
$$\begin{aligned} \alpha &= 180 - \gamma \\ &= 180 - (180 - \delta) \\ &= \delta \end{aligned}$$

så $l \parallel l'$ ved AIA

II

4.4.3 Korollar 4.4.8: l, m, n tre linjer så $m \perp l$ og $n \perp l$. Da er enten $m = n$ eller $m \parallel n$.

Bevis:



La $\{B\} = m \cap l$ og

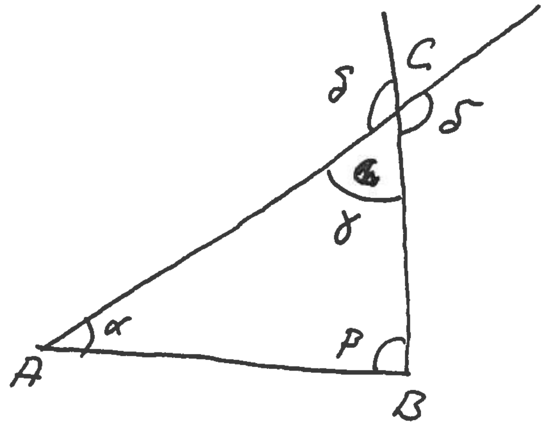
$\{B'\} = n \cap l$

Hvis $B = B'$ så er $m = n$ ved unikhet av perpendikulær.

Hvis $B \neq B'$ så er l en transversal for linjene m og n, og ettersom alle indre vinkler er rette vil $m \parallel n$ ved AIA

II

4.5.1 Korrolar 4.5.6: $\triangle ABC$ trekant. Da er summen av to indre vinkler mindre enn, eller lik målet av deres ytre vinkel.



bevis

Den ytre vinkelen til α og β er δ.

δ og γ er et lineært par, så $\gamma + \delta = 180$.

Ved THM 4.5.2 er $\alpha + \beta + \gamma \leq 180$.

Dermed er

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &\leq 180 - \gamma \\ &= 180 - (180 - \delta) \\ &= \delta \end{aligned}$$

$\blacksquare$

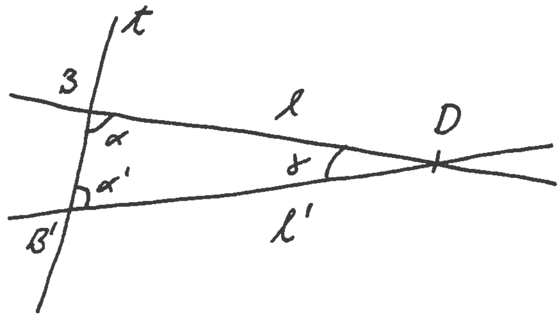
4.5.2: Korollar 4.5.7: $l \neq l'$ transversal t.

Hvis $l \cap l' \neq \emptyset$, la oss si $D \in l \cap l'$. ~~Da er~~

La $\{B\} = l \cap t$, $\{B'\} = l' \cap t$ og la

$\alpha = \mu(\angle B'BD)$ og $\alpha' = \mu(\angle BB'D)$

Da er $\alpha + \alpha' < 180$



bevis: La $\gamma = \mu(\angle B'DB)$

$\gamma > 0$ fordi $\overrightarrow{DB'} \neq \overrightarrow{DB}$ (gradskiveaksiomet)

(Hvis $\overrightarrow{DB'} = \overrightarrow{DB}$ så ville $l = \overleftrightarrow{BD} = \overleftrightarrow{B'D} = l'$)

Vi har at $\alpha + \alpha' + \gamma \leq 180$, så

$$\alpha + \alpha' \leq 180 - \gamma$$
$$< 180$$

∎