K. Brustad (A)

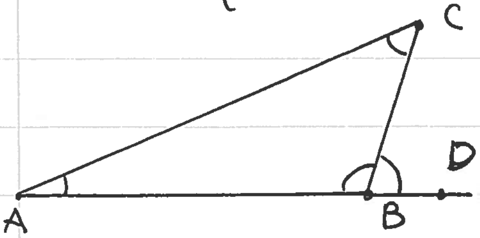
ØVING 4A, V2013

LØSNING:

4.1

(s.73) **Oppg. 1**

Vi skal bevise at dersom



$\mu(\angle ABC) \geq 90°$,

så må $\mu(\angle BCA) < 90°$

og $\mu(\angle CAB) < 90°$

Siden $\mu(\angle ABC) \geq 90$ er supplementvinkelen $\angle DBC$ spiss eller rett. Ut fra YVT må da de motstående indre vinkler $\angle BAC$ og $\angle BCA$ begge være spisse.

(NB! Husk at vi foreløpig ikke har bevist noe om vinkelsummen i en trekant!)

4.2

(s.77) **Oppg. 2**

Vi skal bevise

TEOREM 4.2.3 (AAS):

Hvis $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er triangler s.a. $\angle ABC \cong \angle DEF$, $\angle BCA \cong \angle EFD$ og $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, da er $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

BEVIS:

Vi kan anta UTAG $CB > FE$. Vi avsetter et punkt B' s.a. $C * B' * B$ og $CB' = FE$. Ut fra SAS har vi da $\triangle AB'C \cong \triangle DEF$. Spesielt

Ⓑ

(ØVING 4A, 2013)

er da $\angle AB'C \cong \angle DEF$. Men i følge antagelsen er $\angle ABC \cong \angle DEF$. Altså må

$$\angle ABC \cong \angle AB'C$$

Siden $\angle AB'C$ er en ytre vinkel i $\triangle ABB'$ og $\angle ABC$ er en indre motstående vinkel, er dette i strid med YVT.
(Tilfellet $CB < FE$ behandles helt analogt.)
Altså må $CB = FE$ og ut fra SAS må derfor:

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF.$$

Oppg. 3

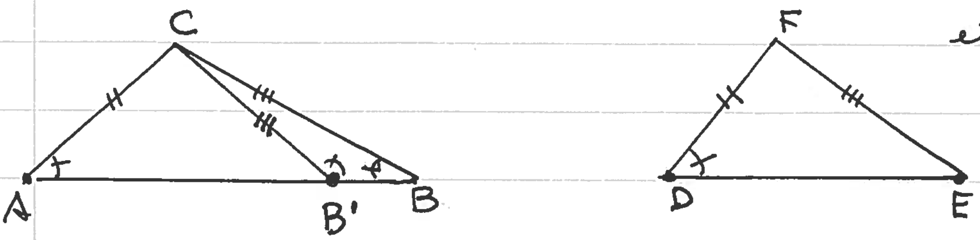
Vi antar at $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er s.a. $\angle BAC \cong \angle EDF$, $AC = DF$ og $CB = FE$. (ASS-hypotesen). Vi skal bevise at da er enten

$$\angle ABC \cong \angle DEF$$

eller disse to vinklene er supplementære.
Vi antar først at $AB = DE$. Da blir $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ut fra SAS. Da blir:

$$\angle ABC \cong \angle DEF$$

Anta så at $DE < AB$. Vi avsetter et punkt B' på $\overrightarrow{AB}$ s.a. $A * B' * B$



og s.a. $AB' = DE$. Da blir $\triangle AB'C \cong \triangle DEF$ ved SAS. Videre har vi: $\overline{CB'} \cong \overline{FE} \cong \overline{CB}$. Altså

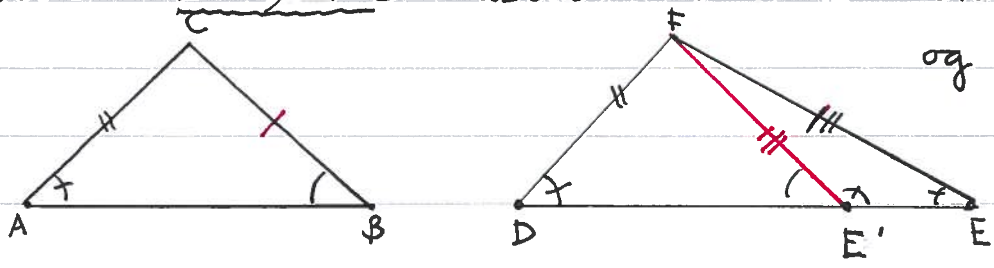
(ØVING 4A, 2013)

Ⓒ

er $\triangle CBB'$ likebeint. Ut fra LBT-teoremet er da $\angle CB'B \cong \angle CBB'$. Dette gir så

$\mu(\angle ABC) = 180° - \mu(\angle AB'C) = 180° - \mu(\angle DEF)$

Hvis $DE > AB$ avsetter vi E' s.a. $D * E' * E$ og $DE' = AB$.



Som foran får vi da at:

$$\mu(\angle ABC) = \mu(\angle DE'F) = 180° - \mu(\angle DEF)$$

$DE = AB$ I dette tilfellet blir trekantene kongruente og dermed vil

$$\mu(\angle ABC) = \mu(\angle DEF).$$

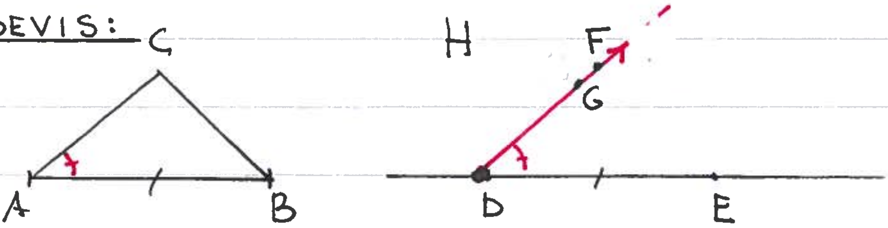
Oppg. 5

Vi skal bevise

TEOREM 4.2.6

Hvis $\triangle ABC$ er en trekant og $\overline{DE}$ et segment s.a. $\overline{DE} \cong \overline{AB}$ og H er et halvplan bestemt av $\overleftrightarrow{DE}$, så finnes det et entydig bestemt punkt $F \in H$ s.a. $\triangle DEF \cong \triangle ABC$.

BEVIS:



Vi har en entydig bestemt stråle $\overrightarrow{DG}$ der $G \in H$, s.a. $\angle EDG \cong \angle BAC$. Vi har et entydig bestemt punkt $F \in \overrightarrow{DG}$, $F \neq D$, s.a. $\overline{DF} \cong \overline{AC}$.

(D)

(ØVING 4A, 2013)

Ut fra SAS har vi da:

$$\triangle DEF \cong \triangle ABC.$$

<u>Entydighet:</u> Har vi bestemt oss for hvilket av de to halvplan relativt til $\overleftrightarrow{DE}$ F skal ligge i og vi har

$$\triangle DEF \cong \triangle ABC,$$

så er $\angle DEF \cong \angle ABC$ og $\overline{EF} \cong \overline{BC}$, og F er dermed entydig bestemt ut fra entydigheten i transportørpostulatet (Aksiom 3.4.1) og entydigheten i Segment Construction Theorem (Oppg. 18, s. 46).

<u>4.3</u>

(s. 81) <u>Oppg. 4:</u>

Vi skal bevise at

(*) $$AB + BC \geq AC$$

for tre vilkårlige punkter.

(i) A, B, C er ikke kolineære. Da gir trekantulikheten:

$$AB + BC > AC$$

Altså (*) holder med ekte ulikhet.

(ii) $A * B * C$ gir $AB + BC = AC$ ut fra definisjonen av mellomliggenhet. (*) holder altså med likhet.

(iii) $A * C * B$ gir $AC + CB = AB$ eller $AB - BC = AC$ og $AB + BC > AC$ siden $BC > 0$. Altså (*) holder med ekte ulikhet.

(iv) $B * A * C$ gir $BA + AC = BC$ gir:

E

(ØVING 4A, 2013)

$$AC = -AB + BC < AB + BC$$

altså ekte ulikhet i (*).

(Hvis vi inkluderer tilfellene der to av punktene faller sammen, f. eks. $A = B$ får vi: $AB + BC = 0 + AC = AC$. Altså får vi (*) med likhetstegn.)

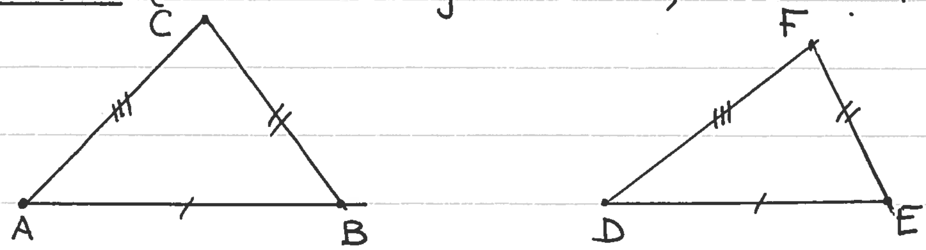
Opg. 5:

TEOREM 4.2.7 (SSS)

Hvis $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er to trekanter der $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ og $\overline{CA} \cong \overline{FD}$, så vil:

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF.$$

BEVIS (v.h.a. Hinge Theorem, Teorem 4.3.3):



Dersom $\angle BAC \cong \angle EDF$ følger det at

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

v.h.a. SAS. Vi kan derfor anta (UTAG) at $\mu(\angle BAC) < \mu(\angle EDF)$. I følge Hengsle-teoremet er da $BC < EF$. Dette er i strid med antagelsen $\overline{BC} \cong \overline{EF}$. Altså må $\mu(\angle BAC) = \mu(\angle EDF)$ og konklusjonen følger med SAS.