Øving 2 Geometri. Frist 13. februar 2013

13.6 : 11
3.2 : 3, 4, 7, 8, 10, 12
13, 14, 15, 23, 24

Def: En (semi)-metrikk på planet $\mathbb{P}$ er en funksjon $D : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \to \mathbb{R}$ så.

1. $D(P,Q) = D(Q,P) \quad \forall P, Q \in \mathbb{P}$
2. $D(P,Q) \geq 0 \quad \forall P, Q \in \mathbb{P}$
3. $D(P,Q) = 0 \iff P = Q$

3.2.3 Vis at drosjemetrikken $\rho : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_2 - x_1| - |y_2 - y_1|$$

er en metrikk.

La (x_1, y_1) og (x_2, y_2) være to punkter i $\mathbb{R}^2$.
Da er

1. $\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$

$$= |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

$$= \rho((x_2, y_2), (x_1, y_1)) \qquad \text{ok}$$

2. $\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2))$

$$= |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$
$$\geq 0 + 0$$
$$= 0$$

ok

3. Anta $\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = 0$. ɔ:

$$0 = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$
$$\geq |x_2 - x_1| \Rightarrow |x_2 - x_1| = 0 \quad ɔ: \; x_1 = x_2$$

og

$$0 = |y_2 - y_1| \Rightarrow y_1 = y_2$$

ɔ: $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$

Anta $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$. Da er

$$\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$
$$= 0 + 0$$
$$= 0$$

ok

Dermed er ρ en metrikk

<u>3.2.7</u> Finn alle punkter i $\mathbb{R}^2$ så.

$$\rho((0,0),(x,y))=1$$

—

Vi skal finne alle punktene (x,y) så

$$1=|x-0|+|y-0|$$
$$=|x|+|y| \qquad (*)$$

Merk først at $1=|x|+|y| \geq |x|$
så vi må ha at $-1 \leq x \leq 1$. Vi løser $(*)$ mhp. y:

$$|y| = 1 - |x|$$

Husk at absoluttverdi er definert som

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

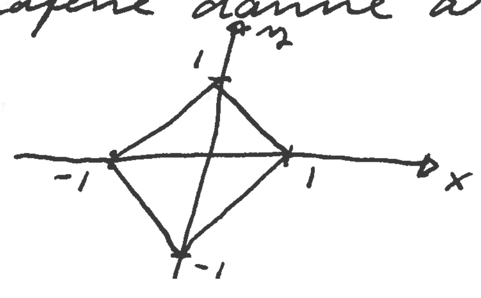
Anta først at $y \geq 0$. Da er

$$y = |y| = 1 - |x| = \begin{cases} 1 - x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 + x, & -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

Hvis $y<0$ så er

$$y = -|y| = |x| - 1 = \begin{cases} x - 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ -x - 1, & -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

Tilsammen vil disse to grafene danne alle punkter så. $\rho((0,0),(x,y))=1$



3.2.8 Vi har metrikken $D: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$D((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}$$

a) Vis at D er en metrikk

1. $D((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}$

$= \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$

$= D((x_2, y_2), (x_1, y_1))$ ok

2. $D((x_1, y_1), (x_2, y_2))$

$= \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}$

$\geq \max\{|x_2 - x_1|\}$

$= |x_2 - x_1|$

≥ 0 ok

Her brukte vi at hvis $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ så er $\max A \leq \max B$.

3. Anta $D = 0$. Da er

$0 = \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}$
$\geq |x_2 - x_1| \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$ og

$0 = \max\{0, |y_2 - y_1|\}$
$= |y_2 - y_1| \quad \Rightarrow \quad y_1 = y_2 \quad): (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$

Anta $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$. Da er

$$D((x_1,y_1),(x_2,y_2))$$
$$= \max\{|x_2-x_1|, |y_2-y_1|\}$$
$$= \max\{0,0\}$$
$$= 0$$

ok

Altså er D en metrikk.

b) Finn alle punktene $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sa.
$D((0,0),(x,y)) = 1$

Vi finner alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sa.

$$1 = \max\{|x|, |y|\}$$

Merk at $1 = \max\{|x|,|y|\} \geq |x|$, så $-1 \leq x \leq 1$

På samme måte er $-1 \leq y \leq 1$.

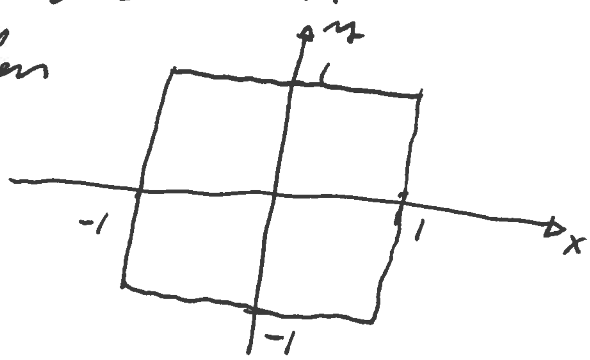
Anta $|y| \geq |x|$. Da er

$$1 = \max\{|x|,|y|\} = |y|$$

som holder for alle $-1 \leq x \leq 1$ og $y = 1$ eller $y = -1$.

Anta $|x| \geq |y|$. Da er $1 = |x|$ som holder for alle $-1 \leq y \leq 1$ og $x = 1$ eller $x = -1$.

Tilsammen gir dette grafen



3.2.10 La l vare en ikkevertikal linje i $\mathbb{R}^2$ ⑥

med ligning $y = mx + b$, og definer

$$f: l \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x(1+|m|)$$

Hvis l er vertikal, $x = a$, definer

$$f: l \to \mathbb{R}, \quad f(a,y) = y$$

Vis at f er en koordinatfunksjon i drosjemetrikken.

Vi må vise at f er en bijeksjon og at

$$|f(P) - f(Q)| = PQ$$
$$= |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$

for alle $P = (x_1, y_1) \in l$ og $Q = (x_2, y_2) \in l$.

Anta først at l ikke er vertikal. ɔ:

$$l = \{(x, mx+b) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

i) Injektiv: Anta $f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2)$

$$\Rightarrow \quad x_1(1+|m|) = x_2(1+|m|) \Rightarrow x_1 = x_2$$

og $y_1 = mx_1 + b = mx_2 + b = y_2$ ok

ii) Surjektiv: Anta $r \in \mathbb{R}$. La $x = \dfrac{r}{1+|m|}$.

Da er $(x, mx+b) \in l$ og

$$f(x, mx+b) = x(1+|m|) = \frac{r}{1+|m|}(1+|m|)$$
$$= r$$

ok.

iii) Må vise $|f(P) - f(Q)| = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$:

$$|f(P) - f(Q)| = |x_1(1+|m|) - x_2(1+|m|)|$$

$$= (1+|m|)|x_1 - x_2| \quad \text{fordi } 1+|m| > 0$$

$$= |x_1 - x_2| + |m||x_1 - x_2|$$

$$= |x_1 - x_2| + |m(x_1 - x_2)| \qquad (|ab| = |a||b|)$$

$$= |x_1 - x_2| + |mx_1 - mx_2|$$

$$= |x_1 - x_2| + |y_1 - b - (y_2 - b)|$$

$$= |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| \qquad \text{ok!}$$

3.2.12 Anta $f: l \to \mathbb{R}$ er en koordinatfunksjon for l.

(a) Vis at $-f$ er en koord.f. for l.

La $g = -f$): $g(P) = -f(P) \quad \forall\, P \in l$

i) Injektiv:

~~Anta~~ La $P, Q \in l$ og anta $g(P) = g(Q)$
Da er $-f(P) = -f(Q)$): $f(P) = f(Q)$,
så $P = Q$ ettersom f er en koord.f.
): g er injektiv

ii) Surjektiv:

La $r \in \mathbb{R}$. Ettersom f er surjektiv, finnes en $R \in l$ s.a. $f(R) = -r$. Dermed er

$$g(R) = -f(R) = r$$

): g er surjektiv

iii) Må vise at $|g(P) - g(Q)| = PQ \quad \forall\, P, Q \in l$:

La $P, Q \in l$. Da er

$$|g(P) - g(Q)| = |-f(P) + f(Q)|$$
$$= QP$$
$$= PQ$$

II

3.2.12 b) La $c \in \mathbb{R}$ og la $g : l \to \mathbb{R}$
være definert ved $g(P) = f(P) + c$ (samme f som i a).)
Vis at g er en koord.f. for l.

i) Injektiv:
La $P, Q \in l$ og anta $g(P) = g(Q)$.
Da er $f(P) + c = f(Q) + c$.): $f(P) = f(Q)$
så $P = Q$ ettersom f er en koord.f.
): g er injektiv.

ii) Surjektiv:
La $r \in \mathbb{R}$. Ettersom f er surjektiv, finnes en $R \in l$ s.a. $f(R) = r - c$. Dermed er

$$g(R) = f(R) + c = r$$

): g er surjektiv.

iii) Vi har at for alle $P, Q \in l$ så er

$$\begin{aligned} |g(P) - g(Q)| &= |f(P) + c - (f(Q) + c)| \\ &= |f(P) - f(Q)| \\ &= PQ \end{aligned}$$

II

3.2.12 c) Vis at hvis $h: l \to \mathbb{R}$ er en koord.f. for l, så finnes en $c \in \mathbb{R}$ så.

$$h(P) = f(P) + c, \quad \text{eller}$$
$$h(P) = -f(P) + c \quad \forall P \in l$$

Vi beviser først et enkelt ~~~~ lemma:
~~~~.

La $A$ og $B$ være to ulike punkter og la $l = \overleftrightarrow{AB}$. Hvis $g$ er en koord.f. for $l$ så $g(A) < g(B)$ så er

$$\overrightarrow{AB} = \{P \in l \mid g(A) \leq g(P)\}$$

Bevis: La $f: l \to \mathbb{R}$ være definert ved

$$f(P) = g(P) - g(A)$$

Da er $f$ en koord.-f. for $l$, (oppg. 3.2.12 b).)
og $f(A) = 0$ og $f(B) = g(B) - g(A) > 0$.
Ved korollar 3.2.20 er dermed

$$\overrightarrow{AB} = \{P \in l \mid f(P) \geq 0\}$$
$$= \{P \in l \mid g(A) \leq g(P)\}$$

fordi $f(P) \geq 0 \iff g(A) \leq g(P)$

II
~~~~

<u>bevis av oppg 3.~~4~~2.12 c):</u>

Anta $h : l \to \mathbb{R}$ er en koord. f. for l

La $X \in l$ så. $h(X) = 0$ og velg $Q \in l$

så. $h(Q) > 0$ (h er surjektiv).

Vi har at $Q \neq X$ så $f(Q) \neq f(X)$

i) Anta först at $f(X) < f(Q)$

For alle $P \in \overrightarrow{XQ}$, så er $0 \leq h(P)$ (korollar 3.2.20)

og $f(X) \leq f(P)$ (lemma)

For alle $P \overset{\in l \setminus}{\cancel{\notin}} \overrightarrow{XQ}$, så er $h(P) < 0$ (kor. 3.2.20)

og $f(P) < f(X)$ (lemma).

Uansett er $h(P)$ og $f(P) - f(X)$ av samme fortegn og ettersom

$$|h(P)| = |h(P) - h(X)|$$
$$= PX$$
$$= |f(P) - f(X)|$$

så er

$$h(P) = f(P) + c, \quad \text{der } c = -f(X).$$

ii) Anta så at $f(X) > f(Q)$

Da er $\overrightarrow{XQ} = \{P \in l \mid f(X) \geq f(P)\}$.

__bevis:__ La $g : l \to \mathbb{R}$ være gitt ved $g(P) = -f(P)$.
Da er g en koord. f. for l og $-g(X) > -g(Q)$
$\supset$: $g(X) < g(Q)$ så ved lemmaet er

$$\overrightarrow{XQ} = \{P \in l \mid g(X) \leq g(P)\}$$
$$= \{P \in l \mid f(X) \geq f(P)\}$$

II

Så for alle $P \in \overrightarrow{XQ}$ så er $h(P) \geq 0$ og $f(X) \geq f(P)$.
For alle $P \in l \setminus \overrightarrow{XQ}$ så er $h(P) < 0$ og $f(X) < f(P)$
Uansett er $h(P)$ og $f(P) - f(X)$ av motsatt fortegn og ettersom

$$|h(P)| = |h(P) - h(X)|$$
$$= PX$$
$$= |f(P) - f(X)|$$

så er

$$h(P) = -(f(P) - f(X))$$
$$= -f(P) + c, \text{ der } c = f(X)$$

II

3.2.13 La l være en linje og la $f: l \to \mathbb{R}$ være en funksjon så. $|f(P) - f(Q)| = PQ \quad \forall P, Q \in l$. Vis at f er en koord. f. for l.

Vi trenger bare å vise at f er en bijeksjon.

i) Injektiv: ~~Anta~~ La $P, Q \in l$. Anta at $f(P) = f(Q)$. Da er $PQ = 0$ og dermed er $P = Q$ (THM 3.2.7).

ii) Surjektiv: La $A \neq B \in l$. Da er $f(A) \neq f(B)$. Om nödvendig, bytt navn på A og B så.

$$f(A) < f(B).$$

~~RULER~~. Det $\exists$ $g: l \to \mathbb{R}$ koord f. så $g(A) = 0$ og $g(B) > 0$. La $r \in \mathbb{R}$

Det $\exists$ $R \in l$ så $g(R) = r - f(A)$.

Teorem 3.2.17 bruker bare at $|f(P) - f(Q)| = PQ$ $\forall P, Q \in l$ til å vise at f bevarer mellomliggenhet.

): $f(R) - f(A)$ har samme fortegn som $g(R) - g(A)$. Ettersom

$$|f(R) - f(A)| = RA = |g(R) - g(A)|$$

så er

$$f(R) - f(A) = g(R) - g(A) = g(R) = r - f(A)$$

og vi har $f(R) = r$

II

3.2.14 Vis at hvis $x, y \neq 0$ og $|x| + |y| = |x+y|$ så har x og y samme fortegn.

Hvis vi kvadrerer begge sider, så får vi at

$$x^2 + 2|x||y| + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$\Rightarrow \qquad xy = |x||y| > 0$$

): Enten er både x og $y > 0$ eller så er både x og $y < 0$

II

(15)

3.2.15 La $A \neq B$ være to punkter.

Hvis f er en koord.f. for $l = \overleftrightarrow{AB}$ så.
$f(A) = 0$ og $f(B) > 0$, vis at

$$\overrightarrow{AB} = \{P \in l \mid f(P) \geq 0\}$$

La $M = \{P \in l \mid f(P) \geq 0\}$

Anta $P \in \overrightarrow{AB}$. Hvis $P = A$ (eller $P = B$) så er $f(P) = 0$ (> 0) så $P \in M$.

Hvis $A * P * B$, ~~så er $AP < AB$ (kor. 3.2.18)~~

~~$\therefore |f(P) - f(A)| < |f(B) - f(A)|$~~

~~$\Rightarrow |f(P)| < |f(B)| = f(B)$~~

og så er $0 = f(A) < f(P) < f(B)$ (THM 3.2.17) ettersom $f(A) < f(B)$. Altså er $f(P) > 0$, så $P \in M$.

Hvis $A * B * P$ så er $0 = f(A) < f(B) < f(P)$ (THM 3.2.17) så $P \in M$ og vi har vist at $\overrightarrow{AB} \subseteq M$.

Anta $P \in M$. Hvis $f(P) = 0$ så er $P = A \in \overrightarrow{AB}$.
Hvis $f(P) > 0$, så er enten $f(A) < f(P) < f(B)$ $\therefore A * P * B$ og $P \in \overrightarrow{AB}$, eller $f(A) < f(B) < f(P)$ $\therefore A * B * P$ og $P \in \overrightarrow{AB}$, eller $f(P) = f(B)$ og $P = B \in \overrightarrow{AB}$. Dermed er $M \subseteq \overrightarrow{AB}$ og vi har vist at $\overrightarrow{AB} = M$ $\blacksquare$

Fire nyttige lemmaer

Ⓐ

La $A \neq B$ være to punkter og la f være en koordinatfunksjon for $l = \overleftrightarrow{AB}$

i) hvis $f(A) < f(B)$, så er

a) $\overrightarrow{AB} = \{P \in l \mid f(A) \leq f(P)\}$

b) og $\overline{AB} = \{P \in l \mid f(A) \leq f(P) \leq f(B)\}$

ii) hvis $f(B) < f(A)$, så er

a) $\overrightarrow{AB} = \{P \in l \mid f(P) \leq f(A)\}$

b) og $\overline{AB} = \{P \in l \mid f(B) \leq f(P) \leq f(A)\}$

~~iii)~~

bevis: La $g : l \to \mathbb{R}$ være gitt ved

ia) $g(P) = f(P) \div f(A)$. Da er g en koord. f. for l og $g(A) = 0$ og $g(B) > 0$. Dermed er

$$\overrightarrow{AB} = \{P \in l \mid 0 \leq g(P)\} \quad \text{(kor. 3.2.20)}$$
$$= \{P \in l \mid f(A) \leq f(B)\} \qquad \underline{\text{ok}}$$

ib) $\overline{AB} = \{A, B\} \cup \{P \mid A * P * B\}$

$$= \{P \in l \mid P = A,\ P = B \text{ eller } f(A) < f(P) < f(B)\}$$

(THM. 3.2.17)

$$= \{P \in l \mid f(A) \leq f(P) \leq f(B)\}$$

(ettersom $f(A) = f(P) \Leftrightarrow A = P$, osv.) $\underline{\text{ok}}$

ii a) La $g: l \to \mathbb{R}$ være definert ved (B)

$$g(P) = f(A) - f(P)$$

Da er g en koord. f. for l og

$$g(A) = 0 \quad \text{og} \quad g(B) = f(A) - f(B) > 0$$

Dermed er

$$\overrightarrow{AB} = \{P \in l \mid 0 \leq g(P)\}$$
$$= \{P \in l \mid f(P) \leq f(A)\}$$

ok

ii b)

$$\overline{AB} = \{A, B\} \cup \{P \mid A * P * B\} \quad (\text{def.})$$

$$= \{P \in l \mid P = A,\ P = B \text{ eller } f(B) < f(P) < f(A)\}$$

(THM. 3.2.17 og det faktum at $f(B) < f(A)$)

$$= \{P \in l \mid f(B) \leq f(P) \leq f(A)\}$$

ok

II

3.2.23 La $A \neq B$ være to punkter. Vis at

a) $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = \overleftrightarrow{AB}$

La f være en koord.f. for $l = \overleftrightarrow{AB}$ så
$\cancel{f(A) < f(B)}$ $f(A) = 0$, $f(B) > 0$. Da er

$$\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = \{P \in l \mid 0 \leq f(P)\}$$

$$\cup \{P \in l \mid f(P) \leq f(B)\}$$

(lemma i a) og ii a))

$$= \{P \in l \mid 0 \leq f(P) \text{ \underline{eller} } f(P) \leq f(B)\}$$

$$= \{P \in l \mid \text{sant}\} \quad (\text{etterom } f(B) > 0)$$

$$= l = \overleftrightarrow{AB}$$

$\amalg$

b) Vis at $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = \overline{AB}$. La f være som i a)
Da er

$$\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = \{P \in l \mid 0 \leq f(P)\}$$

$$\cap \{P \in l \mid f(P) \leq f(B)\}$$

$$= \{P \in l \mid 0 \leq f(P) \text{ \underline{og} } f(P) \leq f(B)\}$$

$$= \{P \in l \mid 0 \leq f(P) \leq f(B)\}$$

$$= \overline{AB} \quad (\text{lemma i b).})$$

3.2.24 La A, B, C være tre punkter så $A * B * C$

a) Vis at $\overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC} = \overleftrightarrow{AC}$

La f være en koord.f for $l = \overleftrightarrow{AC}$ så.

$f(A) < f(B)$. Da er $f(B) < f(C)$ (THM 3.2.17)

og

$$\overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC} = \{P \in l \mid f(P) \leq f(B)\}$$
$$\cup \{P \in l \mid f(B) \leq f(P)\} \quad \text{(lemma iia og ia)}$$
$$= \{P \in l \mid f(P) \leq f(B) \text{ eller } f(B) \leq f(P)\}$$
$$= \{P \in l \mid \text{sant}\}$$
$$= l = \overleftrightarrow{AC}$$

II

b) Vis at $\overrightarrow{BA} \cap \overrightarrow{BC} = \{B\}$

Fra a) får vi at

$$\overrightarrow{BA} \cap \overrightarrow{BC} = \{P \in l \mid f(P) \leq f(B) \text{ og } f(B) \leq f(P)\}$$
$$= \{P \in l \mid f(P) = f(B)\}$$
$$= \{P \in l \mid P = B\}$$
$$= \{B\}$$

II

3.2.24 c) $A * B * C$, $f(A) < f(B) < f(C)$

Vis at $\overline{AB} \cup \overline{BC} = \overline{AC}$

Ved lemma har vi

$$\overline{AB} \cup \overline{BC} = \{P \in l \mid f(A) \leq f(P) \leq f(B)\}$$

$$\cup \{P \in l \mid f(B) \leq f(P) \leq f(C)\}$$

$$= \{P \in l \mid f(A) \leq f(P) \leq f(B) \text{ eller } f(B) \leq f(P) \leq f(C)\}$$

$$= \{P \in l \mid f(A) \leq f(P) \leq f(C)\}$$

$$= \overline{AC} \quad \text{(lemma ii b)} \qquad \text{II}$$

d) Vis at $\overline{AB} \cap \overline{BC} = \{B\}$

Fra c) får vi at

$$\overline{AB} \cap \overline{BC} = \{P \in l \mid f(A) \leq f(P) \leq f(B) \text{ og } f(B) \leq f(P) \leq f(C)\}$$

$$= \{P \in l \mid f(B) = f(P)\}$$

$$= \{P \in l \mid P = B\}$$

$$= \{B\} \qquad \text{II}$$

3.2.24 e) Vis at $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$

Vi har at $f(A) < f(B) < f(C)$, så

$$\overrightarrow{AB} = \{P \in l \mid f(A) \leq f(P)\}$$

og $\overrightarrow{AC} = \{P \in l \mid f(A) \leq f(P)\}$ (lemma i a))

$\therefore$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$

$\blacksquare$