K.K. Brustad

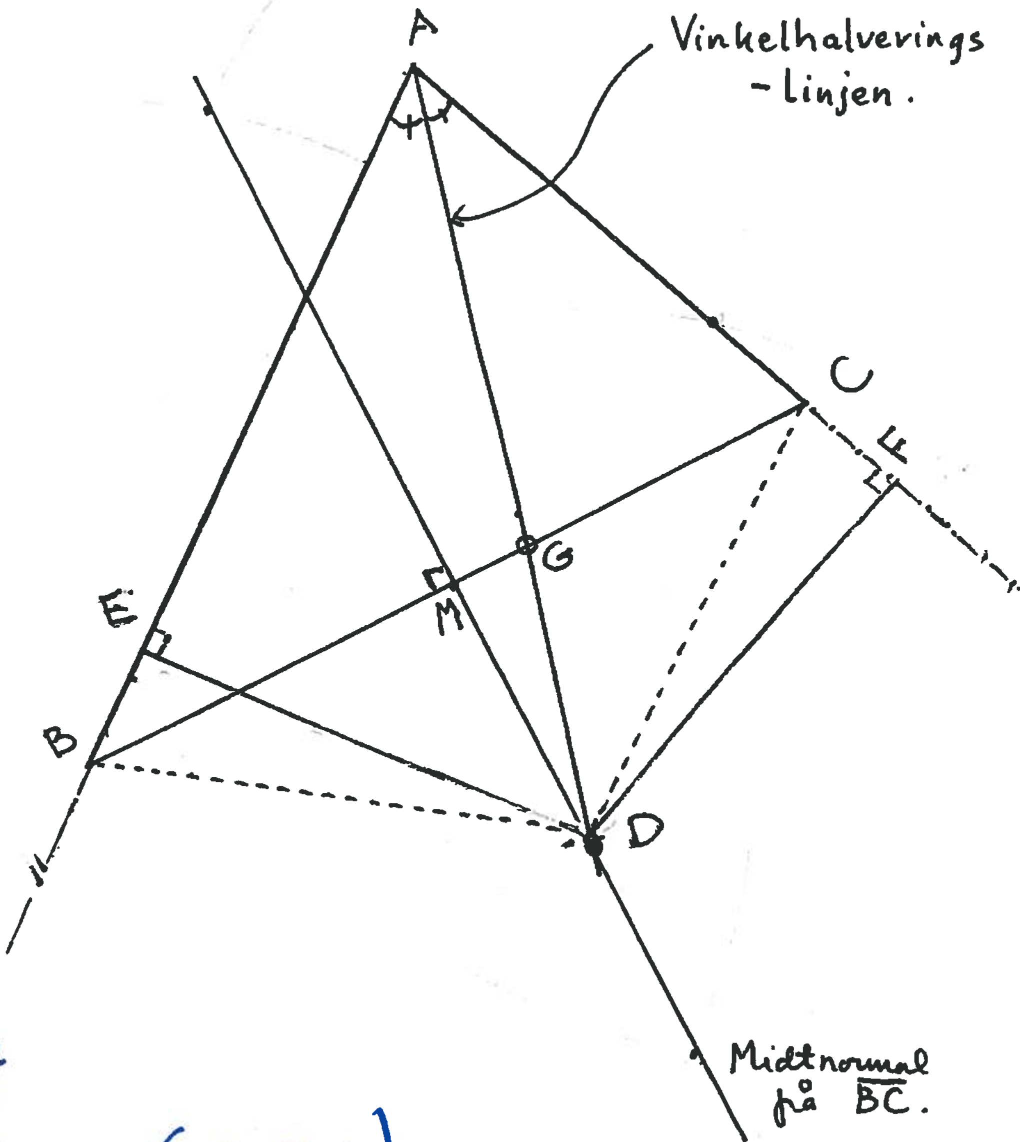
MA2401, V. 2013

ØVING 2A, LØSNING:

AVSN. 1.6

Oppg. 11, s.12

Studer medenstående figur nøye!
Den er konstruert relativt nøyaktig v.h.a.
passer og linjal. GeoGebra kan også brukes!



Vanskelig
12c, 13, (23,24)

HVA ER GALT PÅ FIGURENE I BOKEN?

MA 2401, V 2013
LØSN. ØVING 2^A

Oppg #3, s. 45

$$\rho(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

der $P_1 = (x_1, y_1)$ og $P_2 = (x_2, y_2)$

Vi skal bevise at ρ tilfredsstiller de tre betingelsene definisjon 3.2.9, s. 39.

1. $\rho(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$
$= |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| = \rho(P_2, P_1)$

2. $\rho(P_1, P_2) \geq 0$ fordi $|\ |$ inngår i definisjonen av ρ.

3. $\rho(P_1, P_2) = 0 \Leftrightarrow |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = 0$
$\Leftrightarrow x_1 = x_2$ og $y_1 = y_2 \Leftrightarrow P_1 = P_2$.

Oppg. #4, s. 45

Vi skal bevise at den sfæriske avstand definert i Eks. 3.2.12, s. 40, er en metrikk.

1. $s(P_1, P_2) = s(P_2, P_1)$ fordi avstanden er definert som lengden av den korteste buen på stor-sirkelen som forbinder P_1 og P_2

2. s er en avstand (lengde av en bue) og derfor er $s(P_1, P_2) \geq 0$.

3. $s(P_1, P_2) = 0 \Leftrightarrow P_1 = P_2$ er opplagt fra definisjonen.

Oppg. #10, s. 46

Vi skal bevise at funksjonen $f : l \to \mathbb{R}$ for $l : y = mx + b$, gitt ved:
$f(x, y) = x(1 + |m|)$ er en koordinatfunksjon.

LØSN. ØVING 2A.

La $P_1 = (x_1, y_1)$ og $P_2 = (x_2, y_2)$. Dersom

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$$

må $x_1(1+|m|) = x_2(1+|m|)$

som gir $x_1 = x_2$. Siden $y_1 = mx_1 + b$ og $y_2 = mx_2 + b$, er $y_1 = y_2$. Altså er $P_1 = P_2$. f er m.a.o. injektiv.

Dersom $r \in \mathbb{R}$, velger vi $x = r/(1+|m|)$ og får:

$$f\left(\frac{r}{1+|m|}, \frac{mr}{1+|m|} + b\right) = \frac{r}{1+|m|}(1+|m| = r$$

Altså er f surjektiv.

$$\begin{aligned}|f(P_1) - f(P_2)| &= |x_1(1+|m|) - x_2(1+|m|)| \\ &= |x_1 - x_2|(1+|m|) \\ &= |x_1 - x_2| + |m||x_1 - x_2| \\ &= |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = P_1P_2.\end{aligned}$$

siden $|y_1 - y_2| = |(mx_1 + \cancel{b}) + (mx_2 + \cancel{b})|$
$= |m||x_1 - x_2|$.

For linjen l: $x = a$ innfører vi

$$f(a, y) = y$$

$f(a, y_1) - f(a, y_2) = y_1 - y_2 = 0 \Leftrightarrow y_1 = y_2$

m.a.o. $P_1 = (a, y_1) = P_2 = (a, y_2)$. Altså er f injektiv. For $r \in \mathbb{R}$ velges $P = (a, r)$ og $f(P) = r$. Altså er f surjektiv.

Tilslutt har vi:

$$|f(P_1) - f(P_2)| = |y_1 - y_2| = |a - a| + |y_1 - y_2| = P_1P_2.$$

Altså er f en koordinatfunksjon også for denne type linjer.

Oppg. #12, s. 46

Vi tar som utgangspunkt at funksjonen f er en koordinatfunksjon for linjen ℓ.

OBSERVASJON:

For et hvert valg av konstanten c er funksjonene $g = f + c$ og $h = -f$ bijeksjoner av ℓ på $\mathbb{R}$ siden f er en bijeksjon av ℓ på $\mathbb{R}$. Dette følger av det faktum at sammensetning av to bijeksjoner er igjen en bijeksjon. Husk at $x \mapsto x + c$ og $x \mapsto -x$ begge er bijeksjoner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$.

(a) $|-f(P) - (-f(Q))| = |f(P) - f(Q)| = PQ$

(b) $|g(P) - g(Q)| = |(f(P) + c) - (f(Q) + c)|$
$= |f(P) - f(Q)| = PQ.$

(c) La $h : \ell \to \mathbb{R}$ være en koordinatfunksjon for ℓ. Vi påstår da at

$$h = f + c \quad \text{eller} \quad h = -f + c$$

der f er den gitte koordinatfunksjon og c en konstant.

Anta $h(P_0) = 0$ for $P_0 \in \ell$.

Vi påstår da at

$$h = f - h(P_0)$$

eller $h = -f + h(P_0)$. La $P \in \ell$ være et vilkårlig valgt punkt. Da må

$$|h(P) - h(P_0)| = PP_0 = |f(P) - f(P_0)|$$

fordi både h og f er koordinatfunksjoner ut fra vår antagelse.

Altså har vi:

$$|h(P)| = |f(P) - f(P_0)|$$

for hver $P \in l$. Altså må

$$f(P) - f(P_0) = \pm h(P)$$

for alle $P \in l$, eller:

$$f(P) = \pm h(P) + f(P_0) \quad ; \quad \forall P \in l.$$

Vi er framme hvis vi kan bevise at + tegnet gjelder for hver P – eller at – tegnet gjelder for hver P.

Anta at + tegnet gjelder for et $P_1 \neq P_0$ og – tegnet for et $P_2 \neq P_0$. Vi har:

$$P_1P_2 = |f(P_1) - f(P_2)| = |(h(P_1) + f(P_0)) - (-h(P_2) + f(P_0))| = |h(P_1) + h(P_2)|$$

$P_1P_2 = |h(P_1) - h(P_2)|$ siden h er forutsatt å være en koordinatfunksjon.

$$|h(P_1) + h(P_2)| = |h(P_1) - h(P_2)|$$

Da må enten $h(P_1) = 0$ eller $h(P_2) = 0$.

Dette er en selvmotsigelse for $h(P_0) = 0$ og $P_1 \neq P_0$ og $P_2 \neq P_0$. Altså må + tegnet gjelder for alle P eller – tegnet gjelder for alle P.

Oppg #13, s. 46

Funksjonen $f : l \to \mathbb{R}$ er s.a.

$$|f(P) - f(Q)| = PQ \quad \text{for alle } P, Q \in l.$$

Vi skal vise at f er en koordinatfunksjon.

(i) f er injektiv: $f(P) = f(Q) \Rightarrow PQ = 0 \Rightarrow P = Q$.

(ii) f er surjektiv:

La $x_0 \in \mathbb{R}$. Må vise at det finnes et $P \in l$

K.K. Brustad

MA 2401, V 2013
ØVING 2B, LØSNING

Oppg. # 15, s 46

Vi skal bevise:

KOROLLAR 3.2.20

La A og B være to distinkte punkter. Hvis $\ell = \overleftrightarrow{AB}$ og $f: \ell \to \mathbb{R}$ er en koordinatfunksjon som er s.a. $f(A) = 0$ og $f(B) > 0$, da vil

$$\overrightarrow{AB} = \{P \in \ell \mid f(P) \geq 0\}.$$

BEVIS:

(a) Anta at $P \in \overrightarrow{AB}$. Vi deler opp i følgende:

(i) $P = A$ eller $P = B$ gir $f(P) \geq 0$ som antatt.

(ii) $A * P * B$: Ut fra Teorem 3.2.17 har vi da at $f(P)$ ligger mellom $f(A) = 0$ og $f(B) > 0$. Altså er $f(P) \geq 0$.

(iii) $A * B * P$: Dette gir at $f(B)$ ligger mellom $f(A) = 0$ og $f(P)$. Siden $f(B) > 0$ får vi at $f(P) > 0$ ut fra egenskaper ved tallinjen. Altså er $f(P) \geq 0$

Tilsammen gir da (i), (ii), (iii):

$$\overrightarrow{AB} \subseteq \{P \in \ell \mid f(P) \geq 0\}.$$

(b) Anta så at $f(P) \geq 0$. Skal bevise at da må $P \in \overrightarrow{AB}$, m.a.o. at

(∇) $\{P \in \ell \mid f(P) \geq 0\} \subseteq \overrightarrow{AB}$.

Hvis $P \notin \overrightarrow{AB}$, må $P * A * B$ ut fra definisjonen av $\overrightarrow{AB}$ og Korollar 3.2.19. Da ligger $0 = f(A)$ mellom $f(P)$ og $f(B) > 0$. Altså må $f(P) < 0$ og $P \notin \{P \in \ell \mid f(P) \geq 0\}$

Altså holder (∇).

MA2401, V 2013
ØVING 2B, LØSNING

Oppg. # 23, s. 46

A og B antaes å være disjunkte.

(a) $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = \overleftrightarrow{AB}$

$\subseteq$: Følger av definisjonen av stråle.
$\supseteq$: Anta at $P \in \overleftrightarrow{AB}$. Vi har da følgende tilfeller:

(i) $P = A$ eller $P = B$. Da vil $P \in \overrightarrow{AB}$ og $P \in \overrightarrow{BA}$

(ii) $P * A * B$: $P \in \overrightarrow{BA}$ ut fra definisjonen

(iii) $A * P * B$: $P \in \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$

(iv) $A * B * P$: $P \in \overrightarrow{AB}$.

I alle tilfeller ser vi at $P \in \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$.

(b) $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = \overline{AB}$

$\supseteq$: $\overline{AB} \subset \overrightarrow{AB}$ og $\overline{AB} \subseteq \overrightarrow{BA}$ følger fra definisjonen.
$\subseteq$: Anta $P \in \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$. Da vil $P = A$ eller $P = A$ medføre at $P \in \overline{AB}$.

I motsatt fall har vi
enten $A * P * B$ eller $A * B * P$
samtidig som: $B * P * A$ eller $P * B * A$
Det eneste som er mulig er da at
$$A * P * B.$$
Altså må $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} \subseteq \overline{AB}$.
Tilsammen gir $\supseteq$ og $\subseteq$: $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = \overline{AB}$.

Oppgave # 24, s. 46

A, B, C oppfyller betingelsen $A * B * C$.
Vi skal bevise:

(a) $\overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC} = \overleftrightarrow{AC}$

$\subseteq$ er opplagt.

$\supseteq$ Anta $P \in \overleftrightarrow{AC}$.

MA 2401, V 2013
ØVING 2B, LØSNING

(i) $P = A, B$ eller C $\Rightarrow$ $P \in \overrightarrow{BA}$ eller $P \in \overrightarrow{BC}$

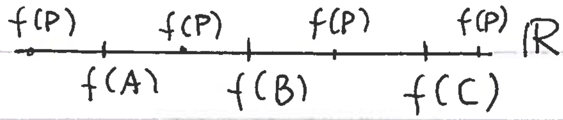
(ii) $P * A * B$ $\Rightarrow$ $P \in \overrightarrow{BA}$

(iii) $A * P * B$ $\Rightarrow$ $P \in \overrightarrow{BA}$

(iv) $B * P * C$ $\Rightarrow$ $P \in \overrightarrow{BC}$

(v) $B * C * P$ $\Rightarrow$ $P \in \overrightarrow{BC}$

Situasjonen på $\mathbb{R}$:



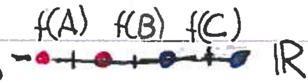
4 muligheter.

I alle tilfellen ser vi at $P \in \overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC}$.

(b) Skal bevise at $\overrightarrow{BA} \cap \overrightarrow{BC} = \{B\}$

$\supseteq$ er opplagt

$\subseteq$ Anta $P \in \overrightarrow{BA} \cap \overrightarrow{BC}$. Har da



• $P = B, A$ eller $B * P * A$ eller $B * A * P$

og samtidig

• $P = B, C$ eller $B * P * C$ eller $B * C * P$.

Det eneste som er mulig er da at

$P = B$

(Vi bygger her på Teorem 3.2.17 og egenskaper ved tall-linjen $\mathbb{R}$.)

(c) $\overline{AB} \cup \overline{BC} = \overline{AC}$; $P = A, B, C \Rightarrow P \in \overline{AC}$

$P \in \overline{AB}$ og $P \neq A, B$ $\Rightarrow$ $A * P * B$ $\Rightarrow$ $A * P * C$

$P \in \overline{BC}$ og $P \neq B, C$ $\Rightarrow$ $B * P * C$ $\Rightarrow$ $A * P * C$

Se NB! nederst!

Altså: $\overline{AB} \cup \overline{BC} \subseteq \overline{AC}$

$P \in \overline{AC}$, $P = A, C$ eller $P \in B$ $\Rightarrow$ $P \in \overline{AB} \vee P \in \overline{BC}$

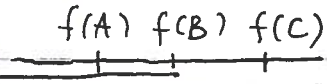
$P \in \overline{AC}$ og $P \neq A, C, B$: $A * P * B$ eller $B * P * C$.

Da vil $P \in \overline{AB}$ eller $P \in \overline{BC}$

Altså: $\overline{AC} \subseteq \overline{AB} \cup \overline{BC}$

(d) Følger av (b) siden $\overline{BA} \subseteq \overrightarrow{BA}$ og $\overline{BC} \subseteq \overrightarrow{BC}$

(e) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.



$\overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{f(A)f(C)}$ på tall-linjen.

NB! Alt det ovenstående bygger på Teorem 3.2.17 og vår kjennskap til tall-linjen.