MA 2401 LØSN. UTVALGTE OPPG. ØVING 1

V. 2013

2.4 Oppg. 7, s. 24

Vi skal avgjøre hvilket parallell-postulat som er oppfylt for Fano's geometri, Eks. 2.2.7, s. 18.
La $l = \{A, B, C\}$, $P = D$. Vi observerer fra figuren at D er inneholdt i tre linjer: $\{C, D, E\}$, $\{D, G, A\}$ og $\{B, F, D\}$. Alle disse har minst et punkt felles med l og er defn ikke parallelle med l. Av symmetrigrunner ser vi at dette også gjelder for hvert valg av l og av $P \notin l$. Altså oppfyller Fanos geometri det elliptiske parallell-postulat.

2.5 Oppg. 1, s. 31

(a) P: Det regner, Q: jeg blir våt.
Setningen blir da: $P \Rightarrow Q$ (Hvis P, så Q)

(b) P: Solen skinner, Q: vi går eller sykler.
Setningen: $P \Rightarrow Q$.

(c) P: $x > 0$, Q: det eksisterer y s.a. $y^2 = 0$.
Setningen: $P \Rightarrow Q$

(d) P: $2x + 1 = 5$, Q: $x = 2$ eller $x = 3$
Setningen: $P \Rightarrow Q$

(MA2401 - ØVING 1B)

Oppg. 2, s.31

Vi skal formulere det motsatte utsagn og det kontrapositive utsagn av utsagnene i oppg. 3.4

Hvis utsagnet kan formuleres som en implikasjon:

$$A \Rightarrow B$$

har vi

det motsatte utsagn er: $B \Rightarrow A$

det kontrapositive utsagn er: $\neg B \Rightarrow \neg A$

Disse to er ekvivalent

(Her står $\neg$ for "ikke".) [s. 35, Venema 1. utg.]

(a) Hvis det regner så blir jeg våt

Motsatt: Hvis jeg blir våt, så regner det.

Kontrapositivt: Hvis jeg ikke blir våt, så regner det ikke.

(b) Hvis solen skinner, vil jeg gå tur eller sykle.

Motsatt: Hvis jeg går tur eller sykler, så skinner solen.

Kontrapositivt: Hvis jeg hverken går tur eller sykler, så skinner ikke solen.

(c) Hvis $x > 0$, så finnes det y s.a. $y^2 = 0$.

Motsatt: Hvis det finnes y s.a. $y^2 = 0$, så må $x > 0$.

Kontrapositivt: Hvis det ikke finnes y s.a. $y^2 = 0$, så må $x \leq 0$.

(d) Hvis $2x + 1 = 5$, så er x enten $= 2$ eller 3.

Motsatt: Hvis $x = 2$ eller $x = 3$, så vil $2x + 1 = 5$

Kontrapositivt: Hvis x hverken er lik 2 eller 3, så er $2x + 1 \neq 5$

(MA 2401 - ØVING 1B)

2.6 Oppg. 5, s.34

TEOREM 2.6.6., s34

For hvert punkt P finnes det minst en linje l s.a. P ikke ligger på l.

BEVIS:

I følge Insidensaksiom 3 finnes det tre punkter A, B, C som ikke er kolineære. Hvis P er et av disse, f.eks. $P = A$, så ligger P ikke på linjen $l = \overleftrightarrow{BC}$.

Hvis P er forskjellig fra A, B, C kan høyst en av linjene $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$ og $\overleftrightarrow{BC}$ inneholde P. Hvis nemlig $P \in \overleftrightarrow{AB}$ og $P \in \overleftrightarrow{AC}$ må $P = A$ siden $\overleftrightarrow{AB}$ og $\overleftrightarrow{AC}$ er forskjellige og bare har punktet A felles.⊛ Analogt får vi $P = B$ eller $P = C$ i de øvrige tilfellene når to av de tre linjene $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{BC}$ inneholder P. I alle tilfellene får vi altså selvmotsigelse. I begge situasjoner finnes det altså en linje l som ikke inneholder P.

⊛ Her benyttes Teorem 2.6.2 !

(MA2401
ØVING 1B) IV

Oppg. 6, s.34

TEOREM 2.6.7, s.34

Det eksisterer tre distinkte linjer s.a. ikke noe punkt ligger på alle tre linjer.

BEVIS:

Det finnes i følge Insidensaksiom 3 tre punkter A, B, C som ikke er kolineære. Dette gir at linjene $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{BC}$ er distinkte (Hvis f.eks. $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{BC}$, må $C \in \overleftrightarrow{AB}$ i strid med antagelsen.) Ut fra Teorem 2.6.2 er A det eneste punkt som er felles for $\overleftrightarrow{AB}$ og $\overleftrightarrow{AC}$, mens B er det eneste punkt som er felles for $\overleftrightarrow{AB}$ og $\overleftrightarrow{BC}$. Et punkt P som var felles for alle tre linjer måtte være lik både A og B, i strid med at A, B, C er distinkte punkter.

Oppg. 7, s.34

TEOREM 2.6.8

Hvis P er et punkt finnes det punkter Q og R s.a. P, Q og R ikke er kolineære.

BEVIS:

Følger av Teorem 2.6.6 siden ℓ inneholder minst to punkter R og Q, $R \neq Q$.

(MA 2401
ØVING 1B) ⓥ

Oppg 8, s. 34

TEOREM 2.6.9

Hvis P og Q er s.a. $P \neq Q$, så finnes det et punkt R s.a. P, Q og R ikke er kolineære.

BEVIS:

Siden $P \neq Q$ finnes det eksakt en linje $\ell = \overleftrightarrow{PQ}$. Ut fra Teorem 2.6.3 finnes det et punkt R som ikke ligger på ℓ. Altså er P, Q og R ikke kolineære.

I

MA 2401, V 2013

LØSN. UTVALGTE OPPG. ØVING 2

Oppg #3, s. 45

$$\rho(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

der $P_1 = (x_1, y_1)$ og $P_2 = (x_2, y_2)$

Vi skal bevise at ρ tilfredsstiller de tre betingelsene definisjon 3.2.9, s. 39.

1. $\rho(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$
$= |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| = \rho(P_2, P_1)$

2. $\rho(P_1, P_2) \geq 0$ fordi $|\ |$ inngår i definisjonen av ρ.

3 $\rho(P_1, P_2) = 0 \Leftrightarrow |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = 0$
$\Leftrightarrow x_1 = x_2$ og $y_1 = y_2 \Leftrightarrow P_1 = P_2$.

Oppg. #4, s. 45

Vi skal bevise at den sfæriske avstand definert i Eks. 3.2.12, s. 40, er en metrikk.

1. $s(P_1, P_2) = s(P_2, P_1)$ fordi avstanden er definert som lengden av den korteste buen på stor-sirkelen som forbinder P_1 og P_2

2. s er en avstand (lengde av en bue) og derfor er $s(P_1, P_2) \geq 0$.

3 $s(P_1, P_2) = 0 \Leftrightarrow P_1 = P_2$ er opplagt fra definisjonen.

Oppg. #10, s. 46

Vi skal bevise at funksjonen $f : l \to \mathbb{R}$ for $l : y = mx + b$, gitt ved:
$f(x, y) = x(1 + |m|)$ er en koordinatfunksjon.

MA 2401, V2013

LØSN. ØVING 2A. (II)

La $P_1 = (x_1, y_1)$ og $P_2 = (x_2, y_2)$. Dersom

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$$

må $x_1(1 + |m|) = x_2(1 + |m|)$

som gir $x_1 = x_2$. Siden $y_1 = mx_1 + b$ og $y_2 = mx_2 + b$, er $y_1 = y_2$. Altså er $P_1 = P_2$. f er m.a.o. injektiv.

Dersom $r \in \mathbb{R}$, velger vi $x = r/(1 + |m|)$ og får:

$$f\left(\frac{r}{1+|m|}, \frac{mr}{1+|m|} + b\right) = \frac{r}{1+|m|}(1 + |m| = r$$

Altså er f surjektiv.

$$|f(P_1) - f(P_2)| = |x_1(1+|m|) - x_2(1+|m|)|$$
$$= |x_1 - x_2|(1 + |m|)$$
$$= |x_1 - x_2| + |m||x_1 - x_2|$$
$$= |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = P_1P_2.$$

siden $|y_1 - y_2| = |(mx_1 + \cancel{b}) + (mx_2 + \cancel{b})|$
$$= |m||x_1 - x_2|.$$

For linjen l: $x = a$ innfører vi

$$f(a, y) = y$$

$f(a, y_1) - f(a, y_2) = y_1 - y_2 = 0 \Leftrightarrow y_1 = y_2$

m.a.o. $P_1 = (a, y_1) = P_2 = (a, y_2)$. Altså er f injektiv. For $r \in \mathbb{R}$ velges $P = (a, r)$ og $f(P) = r$. Altså er f surjektiv.

Tilslutt har vi:

$$|f(P_1) - f(P_2)| = |y_1 - y_2| = |a - a| + |y_1 - y_2|$$
$$= P_1P_2.$$

Altså er f en koordinatfunksjon også for denne type linjer.

MA2401, V2013

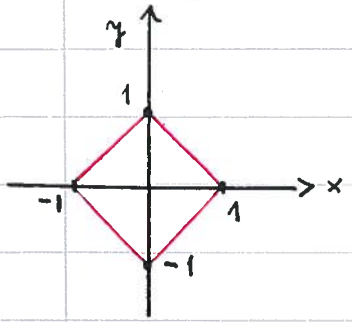
ØVING 2B, LØSNING

Oppg. # 7, s. 45

$$\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1-x_2|+|y_1-y_2|$$

er drosjemetrikken.

$$\rho((0,0),(x,y)) = |x|+|y| = 1$$



1. kvadrant: $x+y=1$
2. kvadrant: $-x+y=1$
3. kvadrant: $-x-y=1$
4. kvadrant: $x-y=1$

"Sirkelen" er tegnet rød.

Oppg. # 8, s. 45

$$D((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \text{maks}\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\}$$

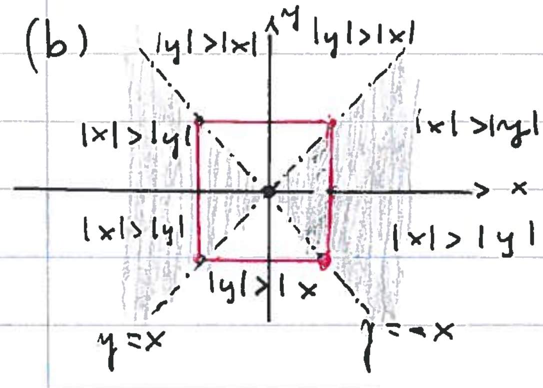
er kvadratmetrikken.

(a)(i) $D((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \text{maks}\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\}$
$= \text{maks}\{|x_2-x_1|,|y_2-y_1|\} = D((x_2,y_2),(x_1,y_1))$

(ii) $D((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \geq 0$ p.g.a. tallverdiene.

(iii) $D((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = 0 \iff |x_1-x_2|=0 \wedge |y_1-y_2|=0$
$\iff x_1=x_2 \wedge y_1=y_2$.

(b)



$|y|>|x|$ i uskraverte sektorer.

$|x|>|y|$ i skraverte sektoren

"Sirkelen" er tegnet rød.

Oppg. # 14, s. 46

$x,y \neq 0$: $\quad |x+y| = |x|+|y| \iff (x+y)^2 = (|x|+|y|)^2$

$\iff x^2+2xy+y^2 = |x|^2+2|x||y|+|y|^2$

$\iff xy = |x||y| \iff$ x og y har samme fortegn.