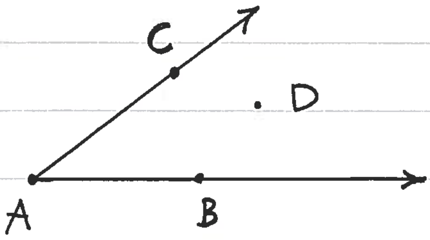
(A)

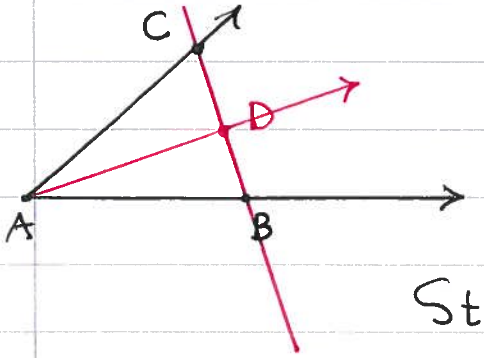
Minner om:

• <u>Def 3.3.7</u> Indre punkt i en vinkel:



$C \sim D$ (rel $\overleftrightarrow{AB}$) (*)
og $B \sim D$ (rel $\overleftrightarrow{AC}$)

<u>TEOREM 3.3.10</u>



Anta $D \in \overleftrightarrow{BC}$

Da gjelder:

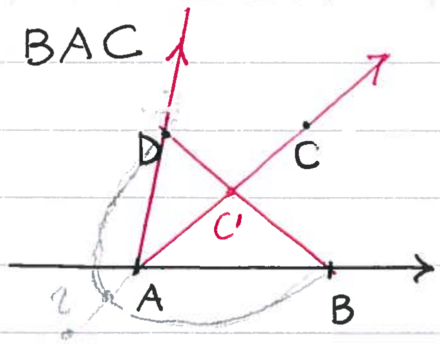
$B * D * C$

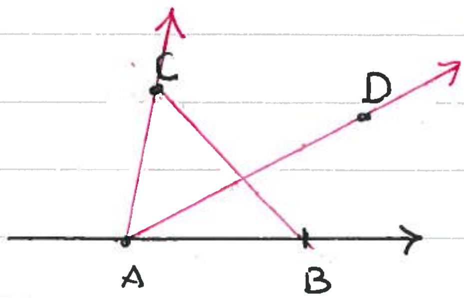
$\Updownarrow$

Strålen $\overrightarrow{AD}$ ligger mellom $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$.

<u>LEMMA 3.4.4</u> (Ikke bevist sist!)

A, B, C, D distinkte punkter s.a. $C \sim D$ (rel $\overleftrightarrow{AB}$) og $D \notin \overrightarrow{AC}$. Da må C være indre punkt i $\angle BAD$ eller D er indre punkt i $\angle BAC$





Ser opplagt ut – men må bevises v.h.a. aksiomene eller teoremer som er bevist tidligere!!

<u>(*) ("PRIVAT" NOTASJON)</u>

$C \sim D$ (rel $\overleftrightarrow{AB}$) betyr at C og D ligger på samme side av linjen $\overleftrightarrow{AB}$, $C \nsim D$ (rel $\overleftrightarrow{AB}$) betyr at C og D ligger på motsatte sider!

B

BEVIS FOR LEMMA 3.4.4:

Anta at D ikke er indre punkt i $\angle BAC$. Siden vi har $C \sim D$ (rel $\overleftrightarrow{AB}$) pr. antagelse, må $B \nsim D$ (rel $\overleftrightarrow{AC}$). I motsatt fall var D et indre punkt i $\angle BAC$ ut fra definisjonen av indre punkt i en vinkel.

Dermed har vi at

$$\overline{BD} \cap \overleftrightarrow{AC} \neq \emptyset.$$

La $\{C'\} = \overline{BD} \cap \overleftrightarrow{AC}$. Vi påstår da at:

$(\triangledown)$ $\qquad B * C' * D.$

Vi må da bare kontrollere at $C' \neq B$ og at $C' \neq D$ for at $(\triangledown)$ skal gjelde!

(i) $C' \neq B$ fordi $C' \in \overleftrightarrow{AC}$ og $\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{AB} = \{A\}$, $A \neq B$.

(ii) $C' \neq D$ fordi $C' \in \overleftrightarrow{AC}$ og $D \notin \overleftrightarrow{AC}$ (antagelse!)

At D ikke kan ligge på den motsatte stråle av $\overrightarrow{AC}$ følger fordi $D \sim C$ (rel $\overleftrightarrow{AB}$).

Fra Teorem 3.3.10 og $(\triangledown)$ ovenfor følger det at $\overrightarrow{AC'}$ ligger mellom $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AD}$. Altså er C' et indre punkt i $\angle BAD$.

Det gjenstår å bevise at

$$C \sim C' \text{ (rel } \overleftrightarrow{AB}) \quad \text{og} \quad C \sim C' \text{ (rel } \overleftrightarrow{AD})$$

for å kunne konkludere at C er et indre punkt i $\angle BAD$. Vi har

$$C' \sim D \text{ (rel } \overleftrightarrow{AB}) \quad \text{og} \quad C \sim D \text{ (rel } \overleftrightarrow{AB}) \text{ (antatt!)}$$

Altså: $C \sim C'$ (rel $\overleftrightarrow{AB}$). Dette siste gir at $C \sim C'$ (rel $\overleftrightarrow{AD}$) siden A ikke kan ligge mellom C og C'.

ALTSÅ: C er indre punkt i $\angle BAD$.