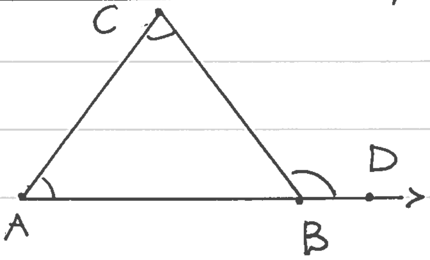
MA2401 / MA6401

EKSAMEN 24/5 – 2013

LØSNING

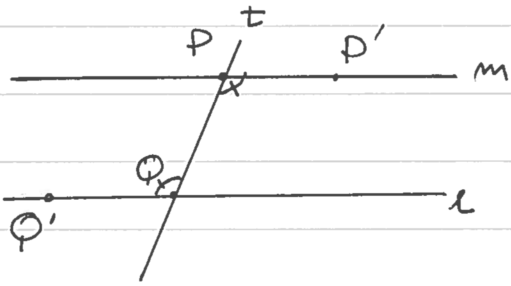
NØYTRAL GEOMETRI (LØSNING):

(a)



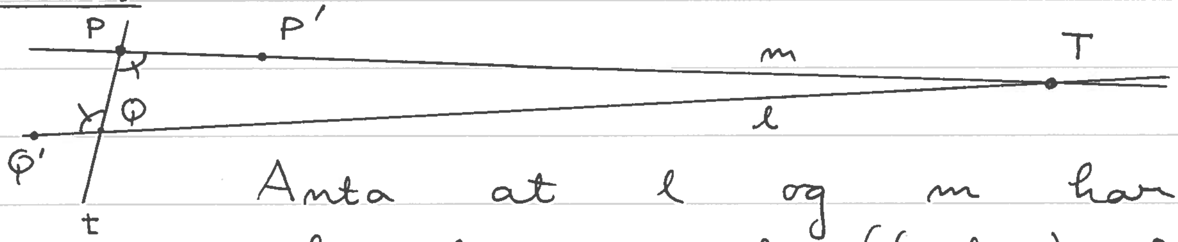
For enhver trekant $\triangle ABC$ vil den ytre vinkel $\angle CBD$ være ekte större enn hver av de to indre motstående vinkler $\angle CAB$ og $\angle ACB$.

(b)



AIVT: Dersom to linjer l og m skjæres av en transversal t slik at alternative indre vinkler $\angle P'PQ$ og $\angle Q'QP$ er kongruente, så vil $m \parallel l$.

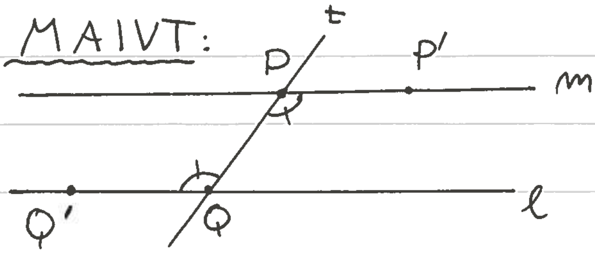
BEVIS:



Anta at l og m har et skjæringspunkt (f.eks.) på den siden av t der P' ligger, da blir $\triangle TPQ$ en trekant der den ytre vinkel $\angle Q'QP$ er kongruent med den motstående indre vinkel $\angle QPP$. Men dette er i strid med YVT. Helt analogt får vi at m og l ikke kan skjære hverandre på den motsatte av t. Altså må $m \parallel l$.

(NØYTRAL)

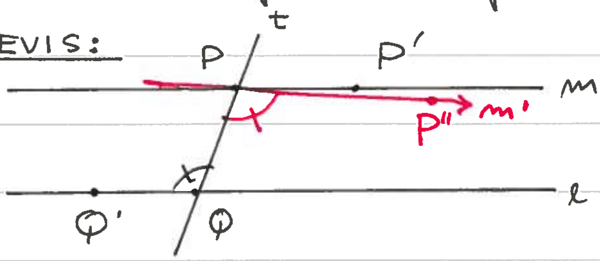
(c) MAIVT:



Dersom $\ell \parallel m$ og t er en transversal til ℓ og m, så må $\angle Q'QP \cong \angle P'PQ$.

(i) Euklidske parallell-postulat $\Rightarrow$ MAIVT:

BEVIS:

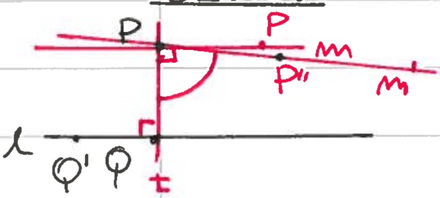


Vi antar $\ell \parallel m$ og at t er en transversal. La vi m' være en linje gjennom P s.a. $\angle QPP'' \cong \angle Q'QP$, følger det fra AIVT at $m' \parallel \ell$. Siden parallellen til ℓ gjennom P er entydig, må da $m' = m$. Altså har vi:

$$\angle QPP' = \angle QPP'' \cong \angle Q'QP$$

(ii) MAIVT $\Rightarrow$ Euklidske parallellpostulat.

BEVIS:

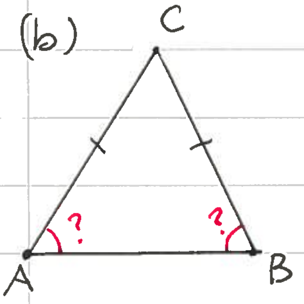


La ℓ være en linje og P et punkt s.a. $P \in \ell$. Vi nedfeller normalen t fra P på ℓ og oppreiser normalen m på t i P og får parallellen m til ℓ gjennom P (AIVT). La n være en annen linje gjennom P, $n \neq m$. P.g.a. entydighetsdeling av gradskive-postulatet må $\mu(\angle QPP') \neq \mu(\angle QPP'')$. Dette gir at $\mu(\angle QPP'') \neq 90° = \mu(\angle Q'QP)$. Ut fra MAIVT er derfor n ikke parallell med ℓ.

EUKLIDSK GEOMETRI (LØSNING):

(a) Siden vi er i euklidsk geometri må $\sigma(\triangle ABC) = 180°$. I nøytral geometri kan det bare bevis at $\sigma(ABC) \leq 180°$ (Saccheri-Legendre.)

(b)

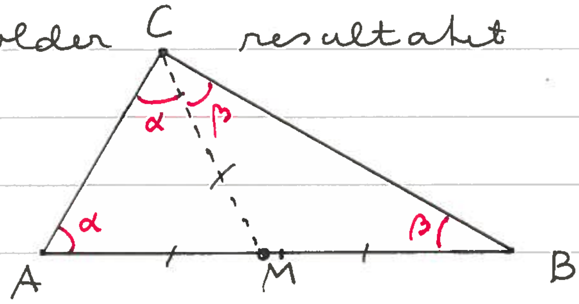


Vi antar at $\overline{CA} \cong \overline{CB}$. Vi studerer trekantene:

$\triangle ABC$ og $\triangle BAC$.

Vi har ut fra antagelsen at $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, $\overline{BC} \cong \overline{AC}$ og $\angle ACB \cong \angle BCA$. Ut fra SAS (side-vinkel-side-aksiomet) er derfor $\triangle ABC \cong \triangle BAC$. Spesielt er da $\angle CAB \cong \angle CBA$. Siden vi her bare benytter SAS-aksiomet holder resultatet i nøytral geometri.

(c)



Vi antar altså at $AM = MC$. Da blir $\triangle AMC$ likebenet og ut fra (b), har vi da:

$$\mu(\angle MAC) = \mu(\angle MCA) = \alpha°$$

Dessuten er $\triangle BCM$ likebenet siden $BM = CM$. Altså har vi:

$$\mu(\angle MBC) = \mu(\angle MCB) = \beta°$$

Siden $A * M * B$, har vi:

$$\mu(\angle ACB) = \mu(\angle ACM) + \mu(\angle MCB) = \alpha° + \beta°.$$

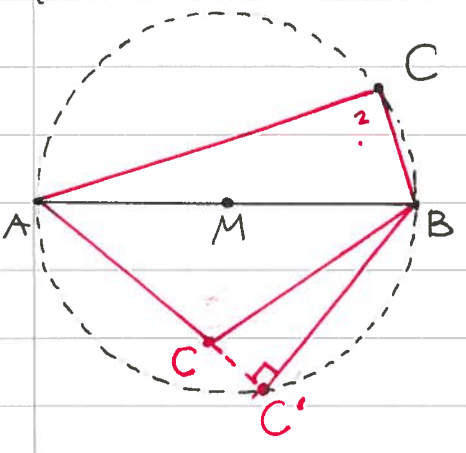
Vi har dessuten:

$$\sigma(\triangle ABC) = \alpha° + \beta° + (\alpha° + \beta°) = 2(\alpha° + \beta°) = 180°$$

Av de to siste likhetene får vi da:

$$\mu(\angle ACB) = 90^\circ$$

(d) Siden midtpunktet M av $\overline{AB}$ må være sentrum i sirkelen og CM er radius i sirkelen, er $AM = MC$. Resultatet følger da fra punkt (c).



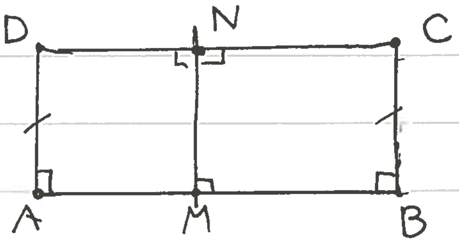
Anta så at C ligger innenfor sirkelen. Da må $\overleftrightarrow{AC}$ skjære sirkelen i et punkt $C' \neq C$. Ut fra (c) har vi da at

$$\mu(\angle AC'B) = 90^\circ$$

Siden $\angle ACB$ er ytre vinkel i $\triangle BCC'$ og $\angle AC'B$ er en motstående indre vinkel i denne trekanten, må $\mu(\angle ACB) > 90^\circ$.

HYPERBOLSK GEOMETRI (LØSNING):

(a)

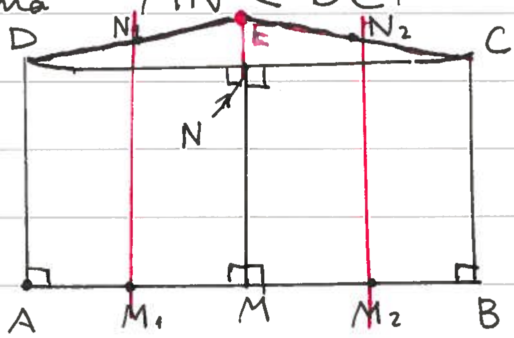


Et Saccheri-kvadrilateral er et (konvekst) kvadrilateral der vinklene $\angle DAB$ og $\angle CBA$ er rette og der $AD = BC$.
Dersom $\mu(\angle ADC) = \mu(\angle BCD) = 90°$, er $\square ABCD$ et rektangel. Siden rektangler ikke finnes i hyperbolske geometri, må vi ha:

$$\mu(\angle ADC) = \mu(\angle BCD) < 90°.$$

Hvis vi har $MN = BC$ er $\square MBCN$ et Saccheri-kvadrilateral. Siden $\mu(\angle MNC) = 90°$ ut fra (ii), følger det fra (i) at $\mu(\angle BCN) = 90°$. Altså er $\square MBCN$ et rektangel - som ikke finnes i hyperbolsk geometri.
Altså må $MN < BC$.

(b)



Siden $MN < BC$ og $MN < AD$ finnes det et punkt E s.a. $M * N * E$ og s.a. $ME = BC = AD$. Vi påstår nå at $\triangle DEC$ har den ønskede egenskap.
Vi får må to nye Saccheri-kvadrilateraler:

$$\square AMED \quad \text{og} \quad \square BMEC.$$

La M_1 og N_1 være midtpunktene på henholdsvis AM og DE. Da vil $\overleftrightarrow{M_1N_1} \perp \overleftrightarrow{AB}$ og $\overleftrightarrow{M_1N_1} \perp \overleftrightarrow{DE}$. Altså er $\overleftrightarrow{M_1N_1}$

midtnormalen på trekantsiden $\overline{DE}$. Vi definerer M_2 og N_2 som midtpunkter på siden $\overline{MB}$ og $\overline{CE}$ i $\square BMEC$. Da blir $\overleftrightarrow{M_2N_2}$ midtnormalen på trekantsiden $\overline{CE}$. Siden både $\overleftrightarrow{M_1N_1}$ og $\overleftrightarrow{M_2N_2}$ står vinkelrette på $\overleftrightarrow{AB}$ er de parallelle.

(c) Vi påstår at $\triangle DEC$ ikke kan ha noen omskreven sirkel. Et senter Z i en slik sirkel må ligge like langt fra alle tre hjørnene D, C, E. Altså må Z være et felles skjæringspunkt for de tre midtnormalene på sidene. Dette er umulig i vårt eksempel siden to av midtnormalene er parallelle.