ov 10
4.8.1, 4, 5, 6

L Carlsen

(A)

ØVING 6, V2013

LØSNING:

4.6
(s.90) **Oppg 3:**

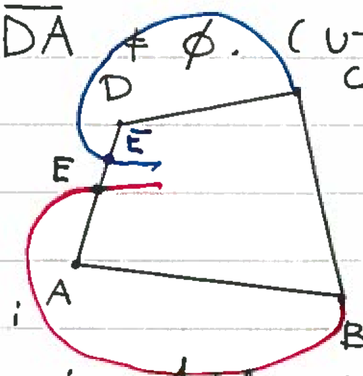
To sider i et kvadrilateral □ABCD sies å være semiparallelle dersom de er motstående, som f.eks. $\overline{AB}$ og $\overline{CD}$, og dessuten er slik at

$$\overline{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \emptyset \quad \text{og} \quad \overleftrightarrow{AB} \cap \overline{CD} = \emptyset.$$

Vi skal bevise følgende:

(a) Hvis et par av motstående sider er semiparallelle, så det gjelder det samme for det andre par av motstående sider.

La oss anta at $\overline{AB}$ og $\overline{CD}$ er semi-paralelle og samtidig at $\overline{BC}$ og $\overline{DA}$ ikke er semiparallelle (RAA). Vi antar altså at $\overleftrightarrow{BC} \cap \overline{DA} \neq \emptyset$. (UTAG)



Vi må ha:

$$\overleftrightarrow{BC} \cap \overline{DA} = \{E\}$$

E = A eller E = D ville medføre at tre hjørner i □ABCD var kolineære – i strid med definisjonen av kvadrilateral. Altså må vi ha A∗E∗D. Videre er det ikke mulig at $E \in \overline{BC}$ ut fra definisjonen av kvadrilateral; m.a.o.

(i) E∗B∗C eller (ii) B∗C∗E

(i) $\underline{E * B * C}$. Semiparallelliteten av $\overline{AC}$ og $\overline{CD}$ gir at $D \sim C$ (rel $\overleftrightarrow{AB}$)
$E * B * C$ gir at $E \nsim C$ (rel $\overleftrightarrow{AB}$). Altså:

$$E \nsim D \text{ rel } (\overleftrightarrow{AB})$$

Siden $E \in \overline{AD}$, $E \neq A$, $E \neq D$, gir $E \sim D$ (rel $\overleftrightarrow{AB}$), altså en selvmotsigelse.

(ii) $\underline{B * C * E}$. Dette gir $B \nsim E$ (rel $\overleftrightarrow{DC}$). Men semiparalleliteten mellom $\overline{AB}$ og $\overline{CD}$ gir $A \sim B$ (rel $\overleftrightarrow{DC}$). Tilsammen gir dette

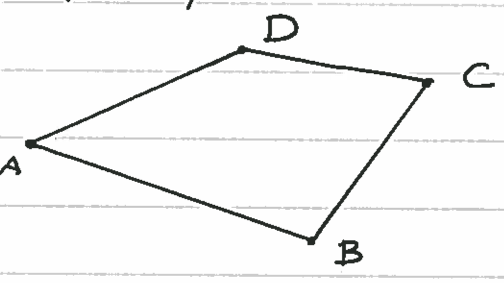
$$A \nsim E \text{ (rel } \overleftrightarrow{DC})$$

Dette gir at $E \notin \overline{AD}$, i strid med definisjonen av $E = \overleftrightarrow{BC} \cap \overline{AD}$.

Altså: $\overline{BC}$ og $\overline{DA}$ er semiparallelle.

Se løsningen min.

(b) Vi skal bevise følgende:
$\square ABCD$ er konvekst $\Leftrightarrow$ begge par av motstående sider er semiparallelle.
(Dette siste betyr at alle hjørner er indre punkt i motstående vinkel!)



$\Leftarrow$: C er indre punkt i $\angle BAD$ fordi $C \sim B$ (rel $\overleftrightarrow{AD}$) og $C \sim D$ (rel $\overleftrightarrow{AB}$), siden $\overline{CB}$ og $\overline{AD}$ er semiparallelle og $\overline{CD}$ og $\overline{AB}$ er semiparallelle.
Helt analogt bevises at A er indre punkt i $\angle BCA$, B er indre punkt i $\angle ADC$ og D er indre punkt i $\angle ABC$.

$\Rightarrow$: Hvis $\square ABCD$ er et konvekst kvadrilateral, må C være indre punkt i $\angle DAB$. D.v.s. at $C \sim D$ (rel $\overleftrightarrow{AB}$) og $C \sim B$ (rel $\overleftrightarrow{AD}$). Altså $\overline{AB}$ og $\overline{CD}$ semiparallelle og $\overline{CB}$ og $\overline{AD}$ semiparallelle.

Oppg. 5:

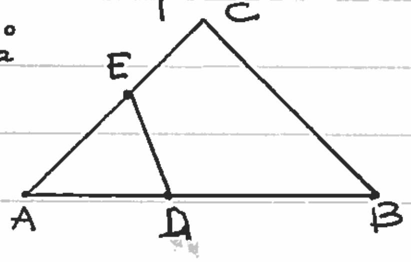
Vi skal bevise:

TEOREM 4.6.7

Hvis $\triangle ABC$ er en trekant, $A*D*B$ og $A*E*C$, så er $\square BCED$ et konvekst kvadrilateral.

BEVIS:

Ut fra Oppg. 3 (a) og (b) er det nok å bevise at hvert par av motstående sider er semiparallelle (Implisitt følger det da også at motstående sider ikke har felles punkter.)



(i) $\overline{DE} \cap \overleftrightarrow{BC} = \emptyset$ siden

$E \sim A$ (rel $\overleftrightarrow{BC}$) og $D \sim A$ (rel $\overleftrightarrow{BC}$)

$\Rightarrow$ $E \sim D$ (rel $\overleftrightarrow{BC}$)

(ii) $\overleftrightarrow{DE} \cap \overline{BC} = \emptyset$ siden $B \not\sim A$ (rel $\overleftrightarrow{DE}$) og $C \not\sim A$ (rel $\overleftrightarrow{DE}$) $\Rightarrow$ $B \sim C$ (rel $\overleftrightarrow{DE}$)

(iii) $\overline{CE} \cap \overleftrightarrow{BD} = \emptyset$ siden $\overleftrightarrow{BD} \cap \overleftrightarrow{CE} = \{A\}$ og $A \notin \overline{CE}$ siden $A * E * C$.

(iv) $\overleftrightarrow{CE} \cap \overline{BD} = \emptyset$ siden $\overleftrightarrow{BD} \cap \overleftrightarrow{CE} = \{A\}$ og $A \notin \overline{BD}$ siden $A * B * D$.

Ⓓ

<u>Oppg. 7:</u>

Vi skal bevise:

<u>KOROLLAR 4.6.9:</u>

(i) Hvis $\square ABCD$ og $\square ACBD$ begge er kvadrilateraler, så er $\square ABCD$ ikke konvekst.

(ii) Hvis $\square ABCD$ er et ikke-konvekst kvadrilateral, så er $\square ACBD$ et kvadrilateral.

Vi har tidligere bevist:

<u>TEOREM 4.6.8:</u>

Et kvadrilateral er konvekst hvis og bare hvis diagonalene $\overline{AC}$ og $\overline{BD}$ skjærer hverandre i et indre punkt.

<u>BEVIS FOR KOROLLAR 4.6.9</u>:

(i) Dersom $\square ABCD$ var konvekst, vil $\overline{AC}$ og $\overline{BD}$ skjære hverandre i et indre punkt. Men da er $\square ACBD$ ikke et kvadrilateral ut fra definisjonen.

(ii) Anta at $\square ABCD$ er et ikke-konvekst kvadrilateral, må $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \emptyset$. Siden $\overline{AD} \cap \overline{BC} = \emptyset$ ut fra definisjonen av kvadrilateral, har alle segmentene $\overline{AC}, \overline{CB}, \overline{BD}, \overline{DA}$ høyst endepunkter felles. Altså er $\square ACBD$ et kvadrilateral.

<u>4.7</u>

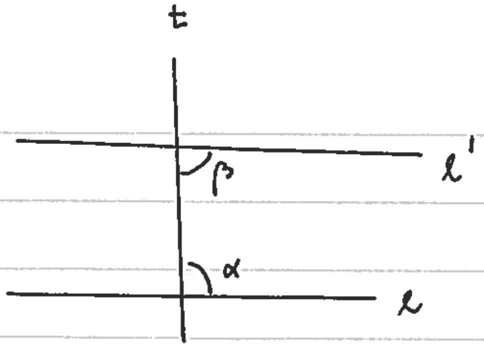
(s.97) <u>Oppg 1:</u>

Vi skal bevise 2. del av Teorem 4.7.2:

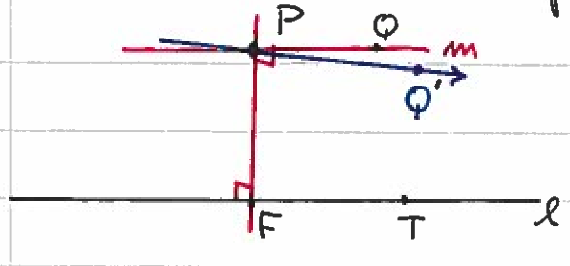
$$EV \Rightarrow EPP$$

Vi antar altså at EV holder:

E



$$\alpha + \beta < 180°$$
$$\Downarrow$$
l og l' skjærer hverandre på samme side av t som α og β.



La l være en linje og P et punkt s.a. $P \notin l$. Vi skal bevise at det finnes eksakt en linje m s.a. $P \in m$ og $l \parallel m$. Ved "Dobbel-perpendikular-konstruksjonen" (s. 84) finner vi en linje m s.a. $P \in m$ og $m \parallel l$. Vi må bevise at det ikke finnes mer enn en slik parallell. Enhver annen linje m' gjennom P må danne en vinkel $\angle FPQ'$ som ikke er rett. Vi kan UTAG anta at $\mu(\angle FPQ') < 90°$. Men da er

$$\mu(\angle TFP) + \mu(\angle FPQ') < 180°.$$

Altså må m' skjære l.

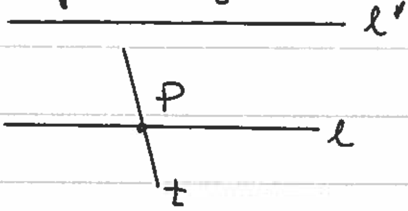
Oppg. 2:

Vi skal bevise:

$$EPP$$
$$\Updownarrow$$

Hvis l og l' er parallelle og $t \neq l$ s.a. t skjærer l, da vil t også skjære l'

$\Downarrow$:



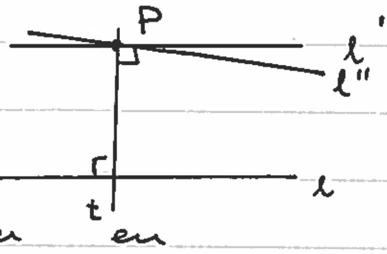
Siden t skjærer l i et punkt P ville t være en

Ⓕ

en parallell til l gjennom P dersom den ikke skjær l. Men i fölge EPP måtte da $t = l$, i strid med antagelsen.

$\Uparrow$:

La P være et punkt og l en linje s.a. $P \notin l$. Hvis l' er linjen gjennom P som framkommer ved dobbelperpendikular-konstruksjonen og l'' er en annen linje gjennom P, er $l' \| l$.



Ut fra vår antagelse må da l'' skjære l. Altså er l' den eneste linje som går gjennom P og er s.a. $l' \| l$. Altså holder EPP.

Opg. 3:

Vi skal bevise:

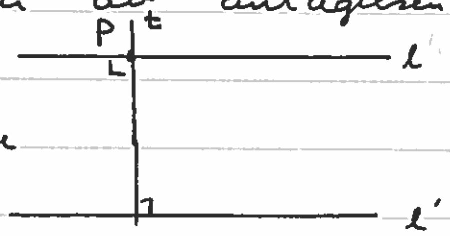
EPP

$\Updownarrow$

Hvis $l \| l'$ og t er en transversal s.a. $t \perp l$, da må også $t \perp l'$

$\Downarrow$:

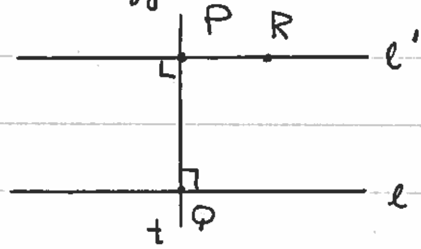
Anta at EPP gjelder og at $l \| l'$ og t er en transversal s.a. $t \perp l$. At t skjærer l' fölger av antagelsen (eller av forrige oppgave.) Ut fra EPP må da l' falle sammen med linjen gjennom P som framkommer ved dobbel-



perpendikular-konstruksjon og t er linjen som inngår i denne konstruksjonen siden $t \perp \ell$. Altså må $t \perp \ell'$.

$\Uparrow$:

La ℓ være en linje og P et punkt s.a. $P \notin \ell$. Hvis $\ell \parallel \ell'$ og $P \in \ell'$, må det bevis at ℓ' er entydig bestemt. Hvis t er en transversal gjennom P s.a. $t \perp \ell$, må $t \perp \ell'$.



Altså er strålen $\overleftrightarrow{PR} \perp \overleftrightarrow{PQ}$

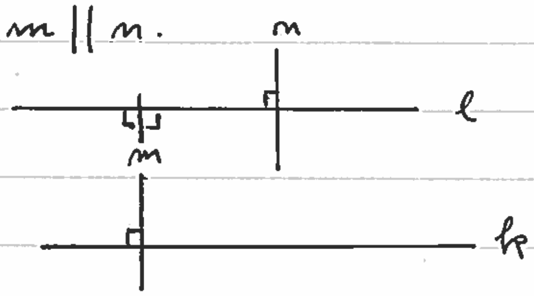
Dette betyr at $\overleftrightarrow{PR} = \ell'$ er den eneste linjen gjennom P s.a. $\ell' \parallel \ell$ ut fra entydigheten i gradskivepostulatet.

Oppg. 4:

Vi skal bevise:

$$\text{EPP}$$
$$\Updownarrow$$

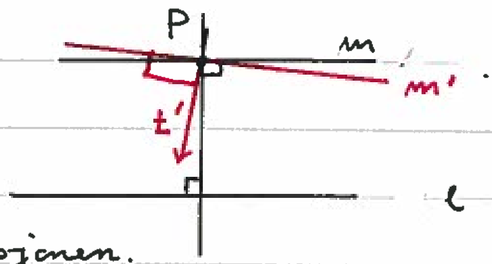
Hvis ℓ, m, n og k er linjer s.a. $\ell \parallel k$, $m \perp k$ og $n \perp \ell$, så vil enten $m = n$ eller $m \parallel n$.



$\Downarrow$: Vi antar at EPP gjelder. Vi antar at $m \neq n$. Ut fra det vi har vist foran, må også $m \perp \ell$. (Oppg. 3) siden EPP holder. Ut fra AIVT følger det da at $m \parallel n$.

H

$\Uparrow$: La ℓ være linje, $P \notin \ell$ og m linjen gjennom P som framkommer ved dobbel-perpendikulær-konstruksjonen.



La m' være en linje gjennom P s.a. $m' \parallel \ell$. Vi må bevise at $m' = m$. En normal til m', t', gjennom P må i følge vår antagelse være s.a. $t' = t$ eller $t' \parallel t$. Det siste er utelukket siden $P \in t$ og $P \in t'$. Altså må $t' = t$. Derfor må $m = m'$ p.g.a. entydigheten av normalen til t i punktet P.

Oppg. 5:

Vi skal bevise at:

$$\text{EPP}$$
$$\Updownarrow$$

Hvis $\ell \parallel m$ og $m \parallel n$, er enten $\ell = n$ eller $\ell \parallel n$.

$\Downarrow$: Anta at $\ell \parallel m$ og $m \parallel n$ og at $\ell \cap n = \{P\}$. Da vil ℓ og n være to paralleller til m gjennom P, i strid med EPP. Altså må enten $\ell = n$ eller $\ell \parallel n$.

$\Uparrow$: La ℓ være vilkårlig linje og P et punkt s.a. $P \notin \ell$. La m og m' være paralleller til ℓ gjennom P. Altså vil $m \parallel \ell$ og $\ell \parallel m'$. Ut fra antagelsen ~~må~~ da enten ~~m~~ $m \parallel m'$ eller $m = m'$. Siden $P \in m \cap m'$ er $m \parallel m'$ umulig. Altså må $m = m'$. Altså gjelder EPP.

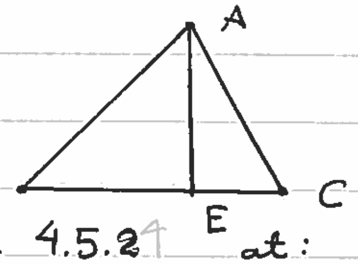
4.8
(s103) Oppgave 1:

Vi skal bevise følgende:

TEOREM 4.8.2 (del 1):

Hvis $\triangle ABC$ er en trekant og $B * E * C$, da gjelder:

$$\delta(\triangle ABC) = \delta(\triangle ABE) + \delta(\triangle ECA).$$



Vi har fra Lemma 4.5.2 at:

$$\sigma(\triangle ABC) = \sigma(\triangle ABE) + \sigma(\triangle ECA) - 180°$$

$$\underline{\delta(\triangle ABC)} = 180° - \sigma(\triangle ABC) = 180° - (\sigma(\triangle ABE) + \sigma(\triangle ECA) - 180°)$$

$$= (180° - \sigma(\triangle ABE)) + (180° - \sigma(\triangle ECA))$$

$$= \underline{\delta(\triangle ABE) + \delta(\triangle ECA)}$$

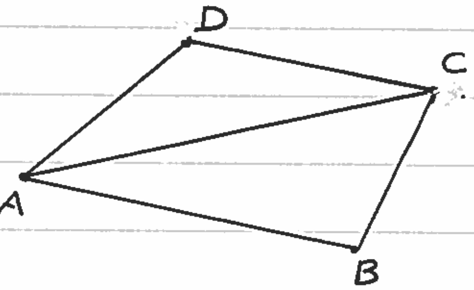
Oppgave 2:

Vi skal bevise:

TEOREM 4.8.2 (del 2):

Hvis $\square ABCD$ er et konvekst kvadrilateral, så gjelder:

$$\delta(\square ABCD) = \delta(\triangle ABC) + \delta(\triangle ACD)$$



Vi har

$$\delta(\square ABCD) = 360° - \sigma(\square ABCD)$$

Videre har vi:

$$\sigma(\square ABCD) = \mu(\angle DAB)^* + \mu(\angle ABC) + \mu(\angle \overset{*}{B}CD) + \mu(\angle CDA) \overset{*}{=} \mu(\angle DAC) + \mu(\angle CBA) + \mu(\angle ABC) + \mu(\angle BCA) + \mu(\angle ACD) + \mu(\angle CDA)$$

$$= \sigma(\triangle ABC) + \sigma(\triangle ACD)$$

$$\underline{\delta(\square ABCD)} = 360 - \sigma(\square ABCD)$$

$$= 180° - \sigma(\triangle ABC) + 180° - \sigma(\triangle ACD)$$

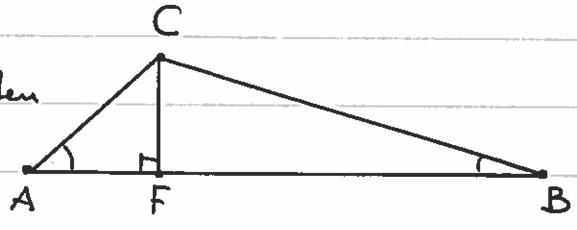
$$= \underline{\underline{\delta(\triangle ABC) + \delta(\triangle ACD)}}$$

(S.104) **Oppgave 4:**

Vi skal bevise fölgende: Hvis $\overline{AB}$ er den lengste side i $\triangle ABC$, vil fotpunktet F for perpendikulæren fra C på $\overleftrightarrow{AB}$ være s.a. $F \in \overline{AB}$. Må vi ha:

$$A * F * B\,?$$

BEVIS:

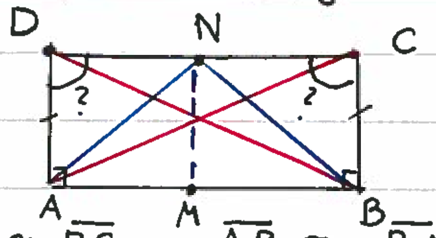


Ut fra Scalene-ulikheten (Teorem 4.3.1) må $\angle ACB$ være den største av de tre vinklene. Altså må $\mu(\angle CAB)$ og $\mu(\angle ABC)$ være spisse. Konklusjonen fölger da fra Lemma 4.8.6. Hvis $F = A$ eller $F = B$ var trekanten rettvinklet og da vil ikke $\overline{AB}$ være den lengste siden.

Oppgave 5:

Vi skal bevise Teorem 4.8.10:
Et Saccheri-kvadrilateral har følgende egenskaper:

1. Diagonalene $\overline{AC}$ og $\overline{BD}$ er kongruente.



Siden $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, $\overline{AB} \cong \overline{BA}$ og $\angle BAD \cong \angle ABC$, følger det ved SAS at

$$\triangle BAD \cong \triangle ABC$$

Spesielt er da $\overline{BD} \cong \overline{AC}$.

2. Toppvinklene $\angle BCD$ og $\angle ADC$ er kongruente.

Vi har nå at

$$\triangle ADC \cong \triangle BCD$$

ut fra SSS siden:
$\overline{AD} \cong \overline{BC}$, $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ (fra (1)) og $\overline{DC} \cong \overline{CD}$.
Da er spesielt:

$$\angle ADC \cong \angle BCD.$$

3. Segmentet som forbinder midtpunktet M av $\overline{AB}$ med midtpunktet N av $\overline{CD}$ er $\perp$ til både $\overline{AB}$ og $\overline{CD}$.

Vi beviser først at $\overline{AN} \cong \overline{BN}$. Siden $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, $\overline{DN} \cong \overline{CN}$ og $\angle ADN \cong \angle BCN$ (fra (2)) får vi ved SAS at:

$$\triangle ADN \cong \triangle BCN.$$

Spesielt har vi da: $\overline{AN} \cong \overline{BN}$ og

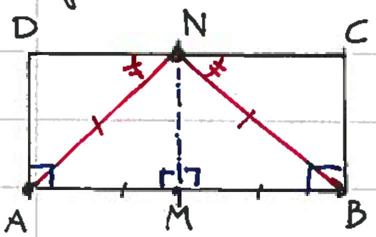
(L)

$(\triangledown)$ $\qquad \angle BNC \cong \angle AND$

Av dette får vi spesielt at

$(\triangledown\triangledown)$ $\qquad \angle AMN \cong \angle BMN.$

Siden disse vinklene utgjør et lineært par, må begge være rette. Altså:



$\overleftrightarrow{MN} \perp \overleftrightarrow{AB}$. Vi har dessuten fra $(\triangledown\triangledown)$ at $\overline{AN} \cong \overline{BN}$. Vi påstår så at:

$$\triangle MNA \cong \triangle MNB$$

Dette følger ved SSS siden også $\overline{AM} \cong \overline{BM}$ og $\overline{MN} \cong \overline{MN}$. Spesielt har vi da:

$$\angle MNA \cong \angle MNB.$$

Siden $B \sim C$ (rel $\overleftrightarrow{MN}$) og $C \sim N$ (rel $\overleftrightarrow{AB}$) er B et indre punkt i $\angle MNC$.

Da har vi:

$\mu(\angle MNC) = \mu(\angle MNB) + \mu(\angle BNC)$

Siden A er et indre punkt i $\angle MND$ får vi på tilsvarende måte:

$\mu(\angle MND) = \mu(\angle MNA) + \mu(\angle AND)$

Ut fra $(\triangledown)$ og $(\triangledown\triangledown)$ får vi da at:

$$\angle MNC \cong \angle MND$$

Men disse vinklene utgjør også et lineært par og må derfor være rette.

Altså: $\overleftrightarrow{MN} \perp \overleftrightarrow{CD}$.

4. $\square ABCD$ er et parallellogram.

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ siden disse linjene har fellesnormalen $\overleftrightarrow{MN}$ (AIVT!) $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{DA}$ siden disse har fellesnormalen $\overleftrightarrow{AB}$ (AIVT)

Ⓜ

5. $\square ABCD$ er et konvekst kvadrilateral.
Følger direkte fra Teorem 4.6.6 og 4 ovenfor.

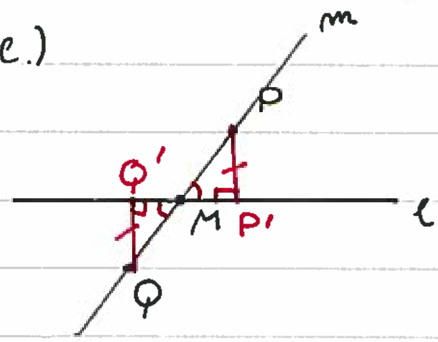
6. Toppvinklene $\angle BCD$ og $\angle ADC$ er begge spisse eller begge rette.
Dette følger av 1 ovenfor og det faktum at $\sigma(\square ABCD) \leq 360°$ når $\square ABCD$ er et konvekst kvadrilateral. (Teorem 4.6.4)

Oppgave 6:

Vi skal bevise følgende:
Hvis ℓ og m er to distinkte linjer og det finnes to punkter P og Q på m s.a. $d(P,\ell) = d(Q,\ell)$, da vil enten ℓ og m skjære hverandre i midtpunktet av $\overline{PQ}$ eller $m \parallel \ell$.

BEVIS:

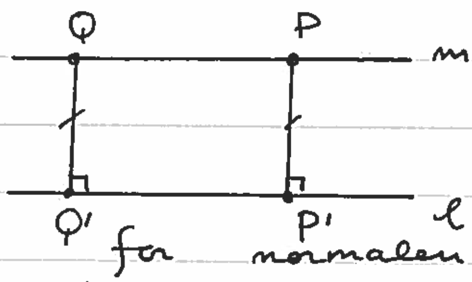
(i) Anta først at $P \not\sim Q$ (rel ℓ.)
Da vil $\overline{PQ} \cap \ell \neq \emptyset$. Vi setter $\overleftrightarrow{PQ} \cap \ell = M$. Vi påstår da at:



$$\triangle PP'M \cong \triangle QQ'M$$

Dette følger ved AAS fordi $\angle QMQ'$ og $\angle PMP'$ er topp-vinkler, $\angle MP'P$ og $\angle MQ'Q$ er rette og $d(P,\ell) = PP' = QQ' = d(Q,\ell)$.
Altså er $\overline{PM} \cong \overline{QM}$.

(ii) Hvis $P \sim Q$ (rel ℓ) får vi følgende situasjon:



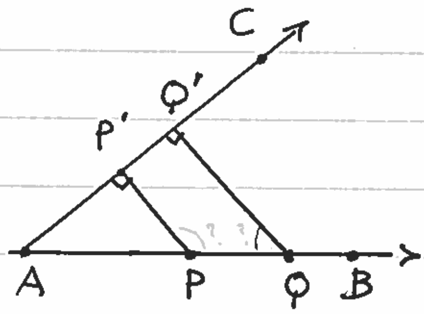
□$QPP'Q'$ blir et Saccheri-kvadrilateral når P' er fotpunktet for normalen fra P på l og Q' er fotpunktet for normalen fra Q på l. Da vet vi fra forrige oppgave at $m = \overleftrightarrow{PQ}$ er parallell med l.

Oppgave 10:

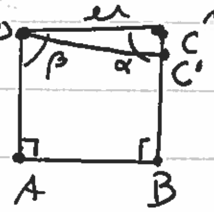
Vi skal bevise:

TEOREM 4.8.12 (Aristoteles' teorem): La A, B, C være tre ikke-kolineære punkter s.a. $\angle BAC$ er spiss og la P og Q være s.a. $P, Q \in \overrightarrow{AB}$ og s.a. $A * P * Q$. Vis at da må $d(P, \overleftrightarrow{AC}) < d(Q, \overleftrightarrow{AC})$. Videre skal det bevises at for hvert tall $d_0 > 0$ finnes det et punkt $R \in \overrightarrow{AB}$ s.a. $d(R, \overleftrightarrow{AC}) > d_0$

BEVIS:



Vi observerer først at:
$\angle P'PQ$ er stump ved YVT siden $\angle AP'P$ er rett.
$\angle PQQ'$ er spiss siden $\angle QQ'$ er rett. Vi skal



bevise at hvis $\alpha > \beta$, så vil $AD > BC$. Anta $AD \leq BC$.

Vi avsetter da et punkt C' slik at $BC' = AD$ og $B*C'*C$. Da blir $\square ABC'D$ et Saccheri-kvadrilateral og dermed har vi at

$$(*) \quad \angle ADC' \cong \angle BC'D$$

Da blir:

$$\beta = \mu(\angle ADC) > \mu(\angle ADC') \overset{(*)}{=} \mu(\angle BC'D) \overset{(YVT)}{>} \mu(\angle BCD) = \alpha,$$

i strid med antagelsen $\alpha > \beta$.

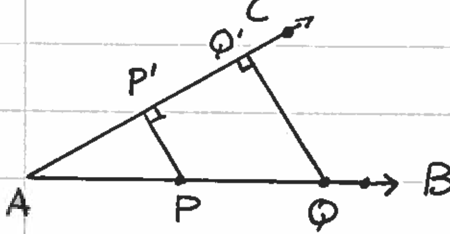
Hvis $AD = BC$, er $\square ABCD$ et Saccheri-kvadrilateral og da har vi bevist at $\alpha = \beta$. Altså har vi:

$$\alpha > \beta \Rightarrow AD < BC$$

Altså: $QQ' > PP'$, eller ekvivalent:

$$d(Q, \overleftrightarrow{AC}) > d(P, \overleftrightarrow{AC})$$

Fra oppg. 9, s. 104, har vi:



$$A*P*Q \text{ og } AP = PQ$$
$$\Downarrow$$
$$d(Q, \overleftrightarrow{AC}) \geq 2\,d(P, \overleftrightarrow{AC})$$

Gjentas denne prosessen n ganger s.a. $PQ_n = 2 \cdot AQ_{n-1}$ og $P*Q_{n-1}*Q$, vil $d(Q_n, \overleftrightarrow{AC}) \geq 2\, d(Q_{n-1}, \overleftrightarrow{AC})$. Dette gir

$$d(Q_n, \overleftrightarrow{AC}) \geq 2^n d(P, \overleftrightarrow{AC})$$

dersom vi setter $Q_1 = Q$. Siden $d(P, \overleftrightarrow{AC}) > 0$ følger det fra Aristoteles' prinsipp for reelle tall at for stor nok $n \in \mathbb{N}$, får vi $2^n d(P, \overleftrightarrow{AC}) > d_0$. Velger vi $R = Q_n$ for en slik n, har vi da:

$$d(R, \overleftrightarrow{AC}) > d_0.$$

Oppg. 4.6.3 b)

Ønsker å vise at $\square ABCD$ er konveks hvis og bare hvis begge par av motstående sider er semi-parallelle.

i) Anta $\square ABCD$ er konveks. Det betyr at et hvert hjørne ligger i det indre av vinklen dannet av de tre andre hjørnene.

Det vil si at C er i det indre av $\angle DAB$, og D er i det indre av $\angle ABC$. Dermed må C og D ligge i samme halvplanet begrenset av $\overleftrightarrow{AB}$. Da er $\overline{CD} \cap \overleftrightarrow{AB} = \emptyset$. Analogt følger for punktene A og B at $\overline{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \emptyset$. Dermed er sidene $\overline{CD}$ og $\overline{AB}$ semi-parallelle. Da følger det av første del av oppgaven at også sidene $\overline{AD}$ og $\overline{BC}$ er semiparallelle.

ii) Anta at begge par av motstående sider er semiparallelle. Anta, for motstrid, at $\square ABCD$ ej konveks.

Vi kan utag anta at D ikke ligger i det indre av $\angle ABC$. Da følger det av Definisjon 3.3.7 at D ikke ligger i snittet av halvplanene begrenset av $\overleftrightarrow{AB}$ og $\overleftrightarrow{BC}$.

Det betyr at A og D må ligge i motsatte halvplaner begrenset av $\overleftrightarrow{BC}$ ELLER C og D ligger i motsatte halvplaner begrenset av $\overleftrightarrow{AB}$.

Det vil si at enten $\overline{AD} \cap \overleftrightarrow{BC} \neq \emptyset$ ELLER $\overline{CD} \cap \overleftrightarrow{AB} \neq \emptyset$ hvilket i begge tilfelle er i motstrid med semiparallelliteten.

Opg. 4.7.2

EPP: For enhver linje l og ethvert punkt P, det ikke ligger på l, finnes kun en linje m gjennom P slik at m er parallell til l.

①: La l, l' og t være linjer slik at l er parallell til l', t forskjellig fra l og t skjærer l, så skjærer t også l'.

Bevis: EPP ⇒ ①: Vi betragter nå tre linje l, l' og t slik at l er parallell med l', t forskjellig fra l og t skjærer l, vi kaller dette punktet P. Vi antar for motstrid at t ikke skjærer l', men da må t og l' være parallelle. Dermed har vi nå to linjer t og l gjennom P, som begge er parallelle med l', dette er i motstrid med EPP og vi må derfor forkaste antagelsen at t ikke skjærer l', og dermed skjærer t også l'.

① ⇒ EPP: Vi betragter en linje l og et punkt P, det ikke ligger på l. For motstrid antar vi nå at det finnes to forskjellige linjer t og l' gjennom P parallelle med l. Fra ① følger det da, at da må enten t eller l' skjærer l eller t være lik l'. Dermed er enhver linjen gjennom P parallell med l entydig bestemt.