Ⓐ

Øving 3A, V2013.
Løsning:

3.3
(s.51) **Oppg. 2:**

$A \neq B$. Vi skal vise at mengden $\{A\}$, $\overline{AB}$, $\overrightarrow{AB}$ og $\overleftrightarrow{AB}$ alle er konvekse mengder.

(i) $\{A\}$ er konveks fordi den ikke inneholder to punkter.

(ii) $\overline{AB}$: Vi skal bevise at om $P \neq Q$, $P, Q \in \overline{AB}$, så vil også $\overline{PQ} \subseteq \overline{AB}$.

Vi bygger her på Teorem 3.2.17:
Hvis $f: \overrightarrow{AB} \to \mathbb{R}$ er en koordinatfunksjon vil $A * C * B$ hvis og bare hvis $f(C)$ ligger mellom $f(A)$ og $f(B)$ på $\mathbb{R}$.

Vi kan UTAG (uten tap av generalitet) anta at $f(A) < f(B)$ for den gitte koordinatfunksjon. Likeledes kan vi anta UTAG $f(P) < f(Q)$ fordi $\overline{PQ} = \overline{QP}$.
Siden $P, Q \in \overline{AB}$ har vi dermed:

$$f(A) \leq f(P) < f(Q) \leq f(B)$$

Hvis $X \in \overline{PQ}$, har vi at:

$$f(P) \leq f(X) \leq f(Q)$$

Tilsammen gir dette:

$$f(A) \leq f(X) \leq f(B)$$

som gir ved Teorem 3.2.17 at:

$$X \in \overline{AB}$$

Altså har vi at $\overline{PQ} \subseteq \overline{AB}$.

(B)

LØSNING 3A, V2013

(iii) Vi skal bevise at om $P \neq Q$ og $P, Q \in \overrightarrow{AB}$, så må $\overline{PQ} \subseteq \overrightarrow{AB}$

Fra (i) har vi at om $P, Q \in \overline{AB}$ så vil $\overline{PQ} \subseteq \overline{AB} \subseteq \overrightarrow{AB}$. Vi kan dermed ha (a) $P \in \overline{AB}$ og $A * B * Q$ eller (b) $A * B * P$ og $A * B * Q$

(a) I det første tilfellet har vi:

$$f(A) \leq f(P) \leq f(B) \quad \text{og} \quad f(A) < f(B) < f(Q)$$

Hvis $X \in \overline{PQ}$, har vi som før:

$$f(P) \leq f(X) \leq f(Q)$$

Hvis $f(X) \leq f(B)$, vil $X \in \overline{AB}$. Hvis $f(X) > f(B)$, vil $f(A) < f(B) < f(X)$ og $X \in \overrightarrow{AB}$. I begge tilfellen (a) og (b) vil altså $X \in \overrightarrow{AB}$, d.v.s. at $\overline{PQ} \subseteq \overrightarrow{AB}$.

(b) Dersom $A * B * P$ og $A * B * Q$ og $X \in \overline{PQ}$, må $f(A) < f(B) < f(P)$. Altså må $X \in \overrightarrow{AB}$. Dette gir:

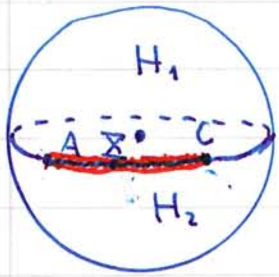
$$\overline{PQ} \subseteq \overrightarrow{AB}.$$

(iv) $\overleftrightarrow{AB}$ er konveks fordi $P, Q \in \overleftrightarrow{AB}$ medfører at $\overline{PQ} \subseteq \overleftrightarrow{AB}$ ut fra definisjonen.

$\boxed{\text{HUSK: } \overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{AB}}$

Oppg. 4 (Se oppg. 6, s.45)

$$A * B * C \Leftrightarrow s(A,C) + s(C,B) = s(A,B)$$



(a) Vi skal angi alle punkt X s.a. $X = A$, $X = C$ eller s.a.

$$s(A,X) + s(X,C) = s(A,C)$$

X må ligge på den korte delbuen av storsirkelen gjennom A og C.

Antar her at A og C ikke er antipodale.

C

LØSNING 3A, V2013

(a) De to halvkulene er halvplanene H_1 og H_2. Ingen storsirkelbue gjennom to punkt $A \neq B$ på H_1 vil skjære linjen (storsirkelen.) Begge er derfor ikke-tomme, konvekse og disjunkte.

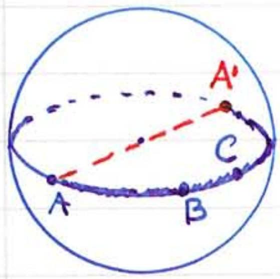
$$S^2 \setminus \ell = H_1 \cup H_2.$$

(b) $A \neq B$, ikke antipodale punkt.
Finn alle C som er s.a.

$$A * B * C$$

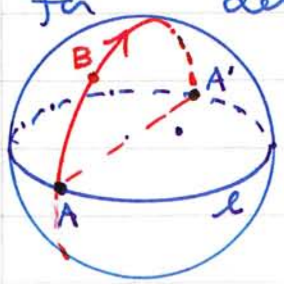
Vi skal da ha C på storsirkelen bestemt av A og C og s.a.

$$s(A,B) + s(B,C) = s(A,C)$$



Vi ser at denne likhet holder bare til punktet A' som er antipodalt til A. Strålen er da den halvsirkelen på kulen som inneholder B, inkludert de to endepunktene A og A'.

(c) Holder Teorem 3.3.9, Stråleteoremet, for denne modellen? Ligger alle



punkter C på $\overrightarrow{AB}$ i samme halvplan som B i forhold til linjen ℓ? Svaret er NEI fordi strålen $\overrightarrow{AB}$ ender i A' - det antipodale punktet til A.

Vi har nemlig:

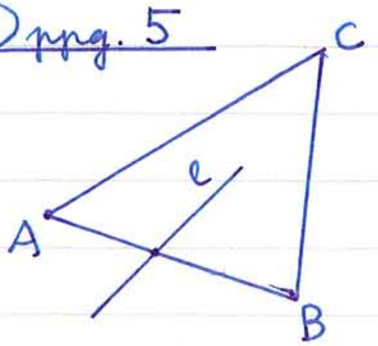
$$s(A,A') = s(A,B) + s(B,A'),$$

så man har $A' \in \overrightarrow{AB}$ og samtidig at $A' \in \ell$.

Ⓓ

LØSNING 3A, V2013

Oppg. 5



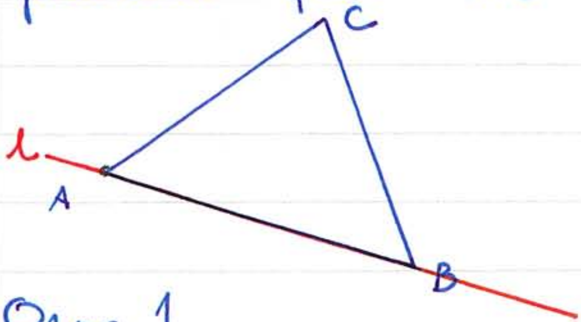
l er en linje som ikke "treffer" noe av hjörnene A, B eller C. Vi skal da bevise at l ikke kan skjære alle tre sidene i trekanten.

Anta at l skjærer $\overline{AB}$ i et indre punkt. Da vil

$$A \not\sim B \ (\text{rel } l)$$

Da må enten $C \in H_A$ (halvplanet der A ligger) eller $C \in H_B$. I det første tilfellet har vi: $C \sim A \ (\text{rel } l)$ d.v.s. at l ikke skjærer $\overline{CA}$. I det andre tilfellet har vi: $C \sim B \ (\text{rel } l)$ d.v.s. at l ikke skjærer $\overline{CB}$.

Dersom en linje inneholder en trekant-side, vil den inneholde punkter fra $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{CB}$.



$A \in \overline{AB} \cap \overline{CA}$

$B \in \overline{AB} \cap \overline{BC}$;

$l \cap \overline{AB} = \overline{AB} \neq \emptyset,$

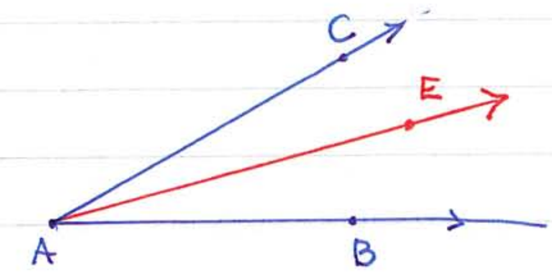
$l \cap \overline{BC} = \{B\} \neq \emptyset,$

$l \cap \overline{CA} = \{A\} \neq \emptyset.$

3.4
(s.55) **Oppg. 1**

Vi skal bevise eksistens og entydighet for halveringsstråle til $\angle BAC$.

LØSNING 3A, V. 2013 Ⓔ



Vi antar at

$\mu(\angle BAC) = \alpha \in (0, 180°)$

Ut fra Teorem 3.4.1 (Transportør-postulatet) kan vi la halvplanet i vårt utgangspunkt være det samme halvplanet som C ligger i forhold til linjen l og r velges lik $\frac{1}{2}\alpha$. Ut fra (3.) i Teorem 3.4.1 finnes det en og bare en stråle $\overrightarrow{AE}$ i dette halvplan s.a.

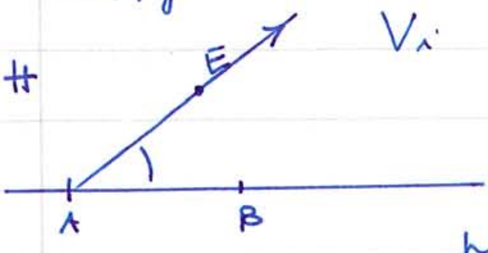
$$\mu(\angle BAE) = \tfrac{1}{2}\alpha$$

I følge Teorem 3.4.5 er da $\overrightarrow{AE}$ en indre stråle i $\angle BAC$. Videre er

$$\mu(\angle EAC) = \mu(\angle BAC) - \mu(\angle BAE) = \alpha - \tfrac{1}{2}\alpha$$
$$= \tfrac{1}{2}\alpha = \mu(\angle BAE).$$

Hvis $\overrightarrow{AF}$ er en indre stråle i $\angle BAC$ s.a. $\mu(\angle BAF) = \mu(\angle EAF)$, må $\mu(\angle BAF) = \frac{\alpha}{2}$ og $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE}$. Altså vil vinkelhalveringsstrålen til $\angle BAC$ være entydig bestemt.

Oppg. 2



Vi lar $A \neq B$ og $l = \overleftrightarrow{AB}$ og $\mathcal{A} = \{\angle BAE \mid E \in H\}$ der H er det ene av halvplanene bestemt av l.

Vi definerer: $f : \mathcal{A} \to (0, 180)$ ved $f(\angle BAE) = \mu(\angle BAE)$.

LØSNING 3A, V2013

(a) Vi skal bevise at f er 1-1-tydig (injektiv)

Vi antar: $f(\angle BAE) = f(\angle BAF)$

D.v.s. at $E, F \in H$ og at

$$\mu(\angle BAE) = \mu(\angle BAF)$$

Ut fra entydigheten i Teorem 3.4.1, må da $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF}$. Altså har vi:

$$\angle BAE = \angle BAF.$$

Altså er f injektiv.

(b) Vi skal så bevise at:

$\overrightarrow{AF}$ ligger mellom $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AE}$

$$\Downarrow$$

$$f(\angle BAF) \in (0, f(\angle BAE))$$

eller ekvivalent:

$$0 < \mu(\angle BAF) < \mu(\angle BAE)$$

Siden $F \in H$ er det klart at

$$0 < \mu(\angle BAF) < 180$$

Ut fra Teorem 3.4.5 (hvis-delen) følger:

$$\mu(\angle BAF) < \mu(\angle BAE). \quad \square$$