MA2401, V2008

LØSNINGER

3.8, s.42

TEOREM 3.6.2:

For enhver linje l finnes det minst et punkt P som ikke ligger på l.

BEVIS:

Insidensaksiom 3 (s.20) gir at det finnes (minst) tre punkter A, B, C som ikke ligger på noen rett linje. Derfor må minst et av disse tre punktene ligge utenfor l.

3.9, s.42

TEOREM 3.6.3:

Hvis P er et punkt, så eksisterer det (minst) to distinkte linjer l og m slik at P ligger både på l og m.

BEVIS:

Insidensaksiom 3 gir at det finnes tre punkter A, B, C som ikke ligger på samme rette linje. Hvis P er et av disse punktene, f.eks. $P = A$, må $\overleftrightarrow{PB}$ og $\overleftrightarrow{PC}$ være innbyrdes forskjellige linjer som begge går gjennom P.
Hvis P er forskjellig fra A, B og C, kan ikke linjene $\overleftrightarrow{PA}$, $\overleftrightarrow{PB}$ og $\overleftrightarrow{PC}$ være like siden A, B og C ikke er kolineære.
Altså må to av de tre linjene være forskjellige, f.eks. $\overleftrightarrow{PA} \neq \overleftrightarrow{PB}$, og begge inneholder P.

LØSNINGER (forts.)

3.10, s. 42:

TEOREM 3.6.4:

For hver linje ℓ finnes det distinkte (d.v.s. forskjellige) linjer m og n begge forskjellig fra ℓ og slik at både m og n skjærer ℓ.

BEVIS:

Insidensaksiom 2 sier at det finnes to forskjellige punkter P og Q som ligger på ℓ. Ut fra Teorem 3.6.2 finnes det også et punkt R som ikke ligger på $\overleftrightarrow{PQ}$. Da vil linjene $m = \overleftrightarrow{PR}$ og $n = \overleftrightarrow{QR}$ skjære ℓ i henholdsvis P og Q. Hvis $\overleftrightarrow{PR} = \overleftrightarrow{QR}$ må denne linjen falle sammen med ℓ ut fra insidensaksiom 1. Men R ligger ikke på $\ell = \overleftrightarrow{PQ}$. Altså må $\overleftrightarrow{PR} \neq \overleftrightarrow{QR}$.

ADVARSEL:

Det er kanskje nyttig å lage enkle skisser for de bevisene som er gitt ovenfor. Men det er veldig viktig at man ikke legger mer inn i disse skisser enn det som følger av insidensaksiomene og eventuelt de teoremer vi allerede har bevist!