MA 2401, GEOMETRI
ØVING 3, 28/1-08
LØSNINGER :

Oppg. 5.2, s 91

Vi skal bevise at "drosje-metrikken" i Eks. 5.4.10, s. 60, virkelig er en metrikk.
Kriteriene for at:

$$\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1-x_2| + |y_1-y_2|$$

er en metrikk står øverst på s. 60.

1. $\rho((x_2,y_2),(x_1,y_1)) = |x_2-x_1| + |y_2-y_1|$
$= |x_1-x_2| + |y_1-y_2| = \rho((x_1,y_1),(x_2,y_2))$
2. $\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1-x_2| + |y_1-y_2| \geq 0$
3. $\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1-x_2| + |y_1-y_2| = 0$
$\Leftrightarrow \; x_1 = x_2$ og $y_1 = y_2 \; \Leftrightarrow (x_1,y_1) = (x_2,y_2)$.

(3-kant-ulikheten holder også, men er ikke inkludert i definisjonen øverst på s. 60.)

Oppg. 5.5, s 91

Vi antar at $f: l \to \mathbb{R}$ er en koordinatfunksjon for l. Dette betyr:

$f: l \to \mathbb{R}$ er en bijeksjon (1-1-tydig korrespondanse)

For $P, Q \in l$ skal dessuten:

$$|f(P) - f(Q)| = PQ$$

Husk at avstanden PQ er gitt som et ikke-negativt tall - uten at det er spesifisert hvordan dette tallet er gitt!!

(a) Vi skal bevise at når f er en koordinatfunksjon, så er også $-f$ gitt ved: $(-f)(P) = -f(P)$ (som vanlig i det reelle)

(i) $-f$ er injektiv: (1-1)

Antar at $-f(P) = -f(Q)$. Da er $f(P) = f(Q)$, og siden f er injektiv, må $P = Q$.

(ii) $-f$ er surjektiv: (onto)

La r være et vilkårlig gitt reelt tall. Siden f er surjektiv finnes det et punkt P på l s.a. $f(P) = -r$. Men da vil $-f(P) = -(-r) = r$. Altså er hvert punkt på $\mathbb{R}$ et billedpunkt ved $-f$.

(iii) $|-f(P) - (-f(Q))| = |f(P) - f(Q)| = PQ$ siden f er antatt å være en koordinat-funksjon.

(b) Vi definerer $g(P) = f(P) + c$, der c er et fastholdt reelt tall. Vi skal vise at g er en koordinatfunksjon siden f er en koordinatfunksjon.

(i) g er injektiv:

Anta at $g(P) = g(Q)$, d.v.s. at

$f(P) + c = f(Q) + c$ som gir $f(P) = f(Q)$

Siden f er antatt å være injektiv, gir dette at $\underline{P = Q}$

(ii) La $r \in \mathbb{R}$ vilkårlig valgt. Siden f er surjektiv finnes det et $P \in l$ s.a.

$$f(P) = r - c.$$

Dette gir $g(P) = f(P) + c = r - c + c = \underline{r}$.

(iii) $|g(P) - g(Q)| = |(f(P)+c) - (f(Q)+c)|$
$= |f(P) - f(Q)| = PQ$

(c) La h være en vilkårlig koordinatfunksjon for ℓ. Vi skal bevise at enten er:
$h(P) = f(P) + c$ for alle $P \in \ell$, eller:
$h(P) = -f(P) + c$ for alle $P \in \ell$ – der c er en reell konstant.

Vi vet at det finnes $P_0 \in \ell$ s.a. $f(P_0) = 0$
Vi definerer $c = h(P_0)$. La Q, Q' være to punkter på ℓ s.a.

$$f(Q') < 0 < f(Q)$$

Da følger fra Teorem 5.7.1, s. 71, at

$$Q' * P_0 * Q.$$

Videre er da $f(R) > 0$ for alle $R \in \overrightarrow{P_0Q}$ og at $f(R') < 0$ for alle $R' \in \overrightarrow{P_0Q'}$. Ut fra Teorem 5.7.1 må da

$$R' * P_0 * R.$$

Da er det to muligheter:
(i) $h(R') < h(P_0) < h(R)$, eller
(ii) $h(R') > h(P_0) > h(R)$.

Vi antar at (i) holder. Vi har da: $h(R) - h(P_0) = P_0R = f(R) - f(P_0)$
$= f(R)$ som gir:

$$h(R) = f(R) + h(P_0) = f(R) + c$$

Videre har vi:

$$h(R') - h(P_0) = -P_0R' = f(R') - f(P_0)$$

$= f(R')$ som gir:

$$h(R') = f(R') + h(P_0) = f(R') + c$$

Altså har vi:

$$\underline{h(P) = f(P) + c} \quad \text{for alle } P \in l$$

(ii) Her har vi

$$-h(R) + h(P_0) = RP_0 = f(R) - f(P_0)$$

NB! Legg merke til rekkefølgen!

eller $h(R) = -f(R) + h(P_0)$

$$h(R') - h(P_0) = R'P_0 = f(P_0) - f(R')$$

som gir: $h(R') = -f(R') + h(P_0)$

Altså har vi i dette tilfellet:

$$\underline{h(P) = -f(P) + c} \quad \text{for alle } P \in l$$

<u>Oppg. 5.6, s. 91</u>

Vi skal bevise det såkalte RPP; s. 62:
For hvert par av distinkte punkter P og Q finnes det en koordinatfunksjon $f: \overleftrightarrow{PQ} \to \mathbb{R}$ s.a. $f(P) = 0$ og $f(P) > 0$.

La $h: \overleftrightarrow{PQ} \to l$ være en koordinatfunksjon for l.

Anta først at $\underline{f(P) < f(Q)}$ og innför betegnelsene $f(P) = a$, $f(Q) = b$

Vi definerer da: $h: \overleftrightarrow{PQ} \to \mathbb{R}$ ved:

$$h(R) = f(R) - a \quad \text{for alle } R \in \overleftrightarrow{PQ}$$

Ut fra oppgave 5.5(b), er dette også en koordinatfunksjon for $\overleftrightarrow{PQ}$.

Dessuten har vi:

$$h(P) = f(P) - a = a - a = 0$$

$$h(Q) = f(Q) - a = b - a > 0.$$

Anta deretter at $\underline{a = f(P) > f(Q) = b}$

Vi definerer da: $h: \overleftrightarrow{PQ} \to \mathbb{R}$ ved:

$$h(R) = -f(R) + a \quad \text{for alle } R \in \overleftrightarrow{PQ}.$$

Dette gir:

$$h(P) = -f(P) + a = -a + a = 0$$
$$h(Q) = -f(Q) + a = -b + a > 0.$$

<u>Oppgave 5.7, s.91</u>

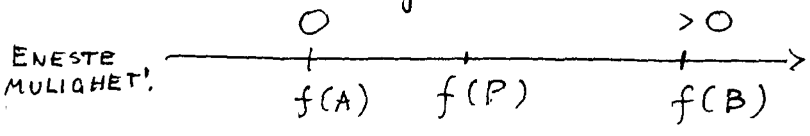
Vi antar at $f : \ell \to \mathbb{R}$ er en koordinatfunksjon for $\ell = \overleftrightarrow{AB}$ s.a. $f(A) = 0$ og $f(B) > 0$.
Vi skal bevise at

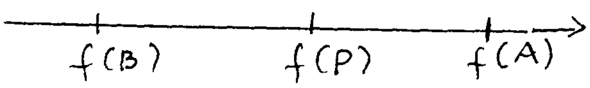
$$\overrightarrow{AB} = \{ P \in \ell \mid f(P) \geq 0 \}.$$

Ut fra antagelsen $f(A) = 0$, $f(B) > 0$ er det klart at $A, B \in \{ P \in \ell \mid f(P) \geq 0 \}$
Anta så at $P \in \ell$ og at $A * P * B$. Ut fra definisjonen av mellomliggenhet har vi da:

$$AP + PB = AB \quad \text{eller ekvivalent:}$$
$$|f(A) - f(P)| + |f(P) - f(B)| = |f(A) - f(B)|$$

Siden dette er en likhet mellom avstander på $\mathbb{R}$, forteller vårt kjennskap til tallinjen at dette holder hvis og bare hvis $f(P)$ ligger mellom $f(A)$ og (B)





Altså er <u>$f(P) > 0$</u> i dette tilfellet.
Antar vi at $A * B * P$, får vi:

$$AB + BP = AP$$

ut fra definisjonen av mellomliggenhet. Altså:

$$|f(A) - f(B)| + |f(B) - f(P)| = |f(A) - f(P)|$$

Her ser vi at $f(B)$ må ligge mellom $f(A)$ og $f(P)$. Altså $f(P) > f(B) > 0$

Dette gir at:

$$\overrightarrow{AB} \subseteq \{P \mid f(P) \geq 0\}$$

Anta så at $P \notin \overrightarrow{AB}$. Dette gir

$$P * A * B$$

Igjen får vi da: $PA + AB = PB$, som gir:

$$|f(P)-f(A)| + |f(A)+f(B)| = |f(P)-f(B)|$$

Altså må punktet $f(A)$ på tallinjen ligge til venstre for $f(A)=0$

Altså: $f(P) < 0$, d.v.s. $P \notin \{P \mid f(P) \geq 0\}$

Dette betyr at:

$$\overrightarrow{AB} \supseteq \{P \mid f(P) \geq 0\}.$$ M.a.o

$$\underline{\overrightarrow{AB} = \{P \mid f(P) \geq 0\}}$$

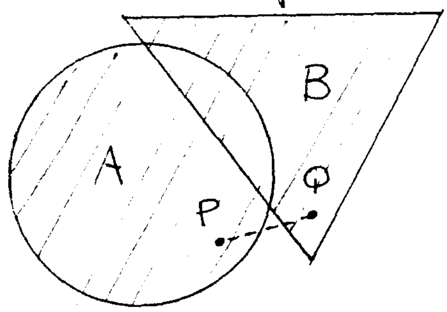
Oppg. 5.9, s 91

(i) Hvis A og B er konvekse mengder, så er $A \cap B$ også konveks.

BEVIS:

La P og Q være distinkte punkter i $A \cap B$. Da er $\overline{PQ} \subset A$ siden A er konveks og $\overline{PQ} \subset B$ siden B er konveks. Altså er $\overline{PQ} \subset A \cap B$.

(ii) Unionen $A \cup B$ trenger ikke være konveks selv om A og B begge er konveks. Eksempel:



A er disken som er konveks
B er trekanten som er konveks.
$\overline{PQ}$ på figuren er ikke inneholdt i $A \cup B$. Altså er $A \cup B$ ikke konveks.

(iii) $\emptyset$ er konveks. Det finnes nemlig intet par av distinkte punkter A og B s.a. $\overline{AB}$ ikke er inneholdt i $\emptyset$.