Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Øyvind Solberg (73 59 17 48)

MA2201 Algebra/TMA4150 Algebra og tallteori

Fredag 28. mai 2010
Tid: 09:00–13:00
Hjelpemidler: Enkel kalkulator

Oppgave 1 La S_4 være den fjerde symmetriske gruppen, dvs. S_4 er alle permutasjonene av elementene $\{1,2,3,4\}$.

a) Vis at permutasjonene $(1,2)(2,3)(1,2)$ og $(2,3)(1,2)(2,3)$ er de samme.

b) Hva er den minste undergruppen H av S_4 som inneholder permutasjonene $\{(1,2),(2,3)\}$?

c) La S_3 være den tredje symmetriske gruppen, dvs. alle permutasjonene av $\{1,2,3\}$. Vi skriver en vilkårlig permutasjon i S_n, for et positivt heltall n, som $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{smallmatrix}\right)$, hvor $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n\}$ som mengde er lik $\{1, 2, \ldots, n-1, n\}$.

Definer $\varphi\colon S_3 \to S_4$ ved at

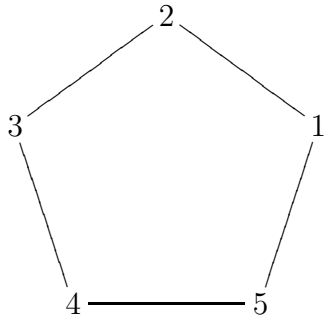
$$\varphi\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 4 \end{smallmatrix}\right).$$

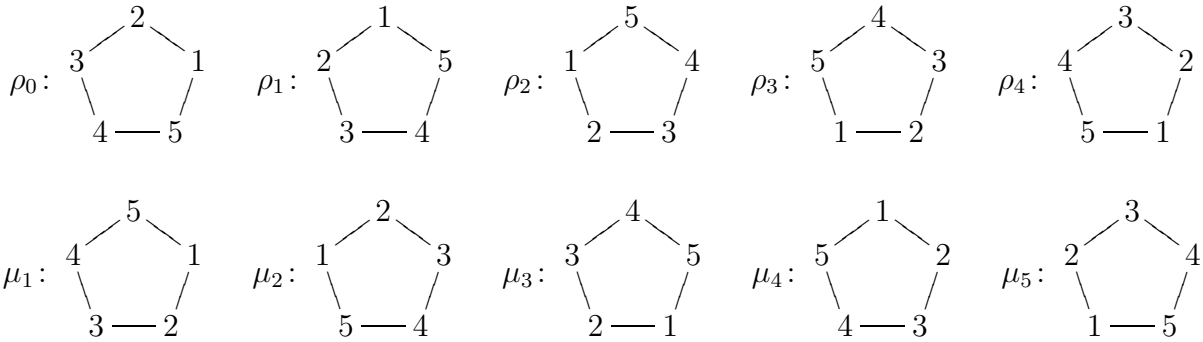
Vis at φ er en homomorfi av grupper. Er $\operatorname{Im}\varphi$ en normal undergruppe av S_4?

Oppgave 2 La p og q være to primtall, og la G være en gruppe av orden pq. La H være en ekte undergruppe av G, dvs. $H \neq G$. Hvis at H er en syklisk gruppe.

Oppgave 3 La D_{10} være symmetriene av den regulære femkanten, dvs. en gruppe av orden 10 med 5 rotasjoner $\{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4\}$ and 5 speilinger $\{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5\}$, som angitt på

figurene under (ρ_0 er identitetselementet i D_{10}). Angir først en regulær femkant, og deretter rotasjonenes og speilingenes virkning på denne.





a) Finn alle undergruppene av orden 2 i D_{10}.

b) (i) Definer hva en Sylow 2-undergruppe av en gruppe G er, der 2 deler ordenen til G.

(ii) La H og H' være to undergrupper av en gruppe G. Gi definisjonen av når H og H' er to konjugerte undergrupper av G.

(iii) Forklar hvorfor alle undergruppene i punkt a) er konjugerte.

Oppgave 4 La $p(x) = x^3 + 2x^2 + 1$ i polynomringen $\mathbb{Z}_3[x]$.

a) Vis at $p(x)$ er et irredusibelt polynom over $\mathbb{Z}_3$. Forklar hvorfor $\mathbb{Z}_3[x]/(p(x))$ blir en kropp.

b) La $\alpha = x + (p(x))$ i $E = \mathbb{Z}_3[x]/(p(x))$. Vis at $p(\alpha) = 0$, og faktoriser $p(x)$ over E.

Oppgave 5 La p være et primtall, og la G være en endelig gruppe der p deler $|G|$ (ordenen til G). Vi lar e betegne identitetselementet i G som vi betrakter som en multiplikativ gruppe (dvs. vi skriver gruppeoperasjonen som multiplikasjon i steden for addisjon).

a) La $X = \{g_1, g_2, \ldots, g_l) \mid g_i \in G \text{ for } i = 1, 2, \ldots, l \text{ og der } g_1 g_2 \cdots g_l = e\}$, og la $H = \langle \sigma \rangle$ være en syklisk gruppe med orden l og generator σ. Definer en avbildning

$$- * -\colon H \times (\underbrace{G \times G \times \cdots \times G}_{l \text{ ganger}}) \to \underbrace{G \times G \times \cdots \times G}_{l \text{ ganger}}$$

ved at

$$\sigma^i * (g_1, g_2, \ldots, g_l) = (g_{l-i+1}, g_{l-i+2}, \ldots, g_l, g_1, g_2, \ldots, g_{l-i})$$

for $i = 0, 1, 2, \ldots, l-1$. Vis at dette induserer en virkning av H på X, dvs. X er en H-mengde.

b) La $X_\sigma = \{x \in X \mid \sigma * x = x\}$, og la $X_H = \{x \in X \mid h * x = x, \forall h \in H\}$. Vis at $X_\sigma = X_H$, og identifiser X_σ med en delmengde av G.

c) La $|G| = p^t m$, der $\gcd(p, m) = 1$. La w være et positivt heltall slik at $w \leq t$. La N_w være antall elementer i G med orden p^i for i slik at $1 \leq i \leq w$. Vis at

$$N_w \equiv -1 \mod p.$$

d) Vis at antall elementer i G med orden p^i for en fiksert i der $2 \leq i \leq t$, er delelig med p.