MA2201 Øving 9 LF

s 333 oppg 5

Vi skal vise at ingen gruppe av orden 96 er simpel.

$96 = 2^5 \cdot 3$ La G være en gruppe av orden 96.

Ved Teorem 36.11 har G enten 1 eller 3 Sylow 2-undergrupper, av orden $2^5 = 32$.

Hvis det bare er én Sylow 2-undergruppe, er denne normal i G og G er ikke simpel ved oppg. 12 s. 327.

Hvis det er 3 Sylow -undergrupper: la H og K være to av dem.

$|H \cap K| = 2^4 = 16$ ved Lemma 37.8.

Siden $\frac{|H|}{|H \cap K|} = \frac{|K|}{|H \cap K|} = 2$, er $H \cap K$ en normal undergruppe av både H og K

$\Rightarrow N[H \cap K]$ inneholder både H og K $\Rightarrow 2^5 \mid |N[H\cap K]| > 2^5$ og $|N[H \cap K]| \mid |G|$

$\Rightarrow |N[H \cap K]| = 96 \Rightarrow N[\ \cap K]\quad G$

Det følger at $H \cap K$ er en normal undergruppe av G, så G er ikke simpel.

s. 333 oppg. 7

Vi skal vise at enhver gruppe av orden 30 inneholder en undergruppe av orden 15.

Ved eks. 37.12 har G en normal undergruppe H av orden 5 eller 3.

$|H| = 5$: $|G/H| = \frac{30}{5} = 6$

G/H har én Sylow 3-undergruppe K av orden 3, denne er normal i G/H ved oppg 12 s. 327.

La $\lambda : G \longrightarrow G/H$ være den kanoniske homomorfien.

$\lambda^{-1}[K]$ er normal i G ved Teorem 15.16 og har orden $3 \cdot 5 = 15$ ved Teorem 13.15.

$|H| = 3$: $|G/H| = \frac{30}{3} = 10$

G/H har én Sylow 5-undergruppe K av orden 5, denne er normal i G/H ved oppg. 12 s. 327.

$\lambda^{-1}[K]$ er normal i G ved Teorem 15.16 og har orden $5 \cdot 3 = 15$ ved Teorem 13.15.

s. 174 oppg 5

$(2,3)(3,5) = (2 \cdot 3, 3 \cdot 5) = (1, 6)$ i $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_9$

s. 174 oppg 6

$(-3,5)(2,-4) = (-3 \cdot 2, 5(-4)) = (-6, -20) = (2, 2)$ i $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{11}$

s. 174 oppg. 8

$\mathbb{Z}^+$ er ikke en ring, $\langle \mathbb{Z}^+, + \rangle$ er ikke en gruppe.

s. 175 oppg. 11

$\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ er en kommutativ ring med multiplikativ identitet $1 = 1 + 0\sqrt{2}$, ikke en kropp siden f.eks. 2 ikke har en multiplikativ invers.

s. 175 oppg 13

$\mathbb{R}i$ er ikke en ring siden $\mathbb{R}i$ ikke er lukket under multiplikasjon:

$i \cdot i = -1 \notin \mathbb{R}i$.

s. 175 oppg. 23

La $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ være en ringhomomorfi

har at $\varphi(1) = \varphi(1^2) = \varphi(1)^2 \Rightarrow \varphi(1) = 1$ eller $\varphi(1) = 0$

$\varphi(1) = 1$: $\varphi(n) = \varphi(n \cdot 1) = n\varphi(1) = n \rightsquigarrow \varphi$ er identiteten

$\varphi(1) = 0$: $\varphi(n) = \varphi(n \cdot 1) = n\varphi(1) = 0 \ \forall n \in \mathbb{Z} \rightsquigarrow \varphi \equiv 0$.

s. 175 oppg. 28

$x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$

$\Rightarrow x \equiv -3 \mod 14$, $x \equiv 2 \mod 14$, $x \equiv 4 \mod 14$, $x \equiv 9 \mod 14$

$\equiv 11 \mod 14$

s. 176 oppg. 34

R_2: la $f, g, h \in F$

$(f(gh))(x) = f(x)(gh)(x) = f(x)(g(x)h(x)) = (f(x)g(x))h(x)$
$= (fg(x))h(x) = ((fg)h)(x) \quad \forall x \in R$

$\Rightarrow f(gh) = (fg)h$

R_3: la $f, g, h \in F$

$(f(g+h))(x) = f(x)(g+h)(x) = f(x)(g(x)+h(x)) = f(x)g(x) + f(x)h(x)$
$= fg(x) + fh(x) = (fg+fh)(x) \quad \forall x \in R$

$\Rightarrow f(g+h) = fg + fh$

$((f+g)h)(x) = (f+g)(x)\,h(x) = (f(x)+g(x))h(x) = f(x)h(x) + g(x)h(x)$
$= fh(x) + gh(x) = (fh+gh)(x) \quad \forall x \in R$

$\Rightarrow (f+g)h = fh + gh$

s. 176 oppg. 35

la $f, g \in F$

$\phi_a(fg) = (fg)(a) = f(a)g(a) = \phi_a(f)\phi_a(g)$

s. 176 oppg. 37

1) U er lukket under $\cdot$:

la $a, b \in U$

$\exists x, y \in R$ s.a. $ax = xa = 1$, $by = yb = 1$

$x, y \in U$ per def. av U

har at $(ab)(yx) = a(by)x = ax = 1 = yb = y(xa)b = (yx)(ab)$

$\Rightarrow ab \in U$

2) $\cdot$ er assosiativ i U siden $\cdot$ er assosiativ i R

3) $1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow 1 \in U$

4) la $a \in U$

$\exists x \in R$ s.a. $ax = xa = 1$

$x \in U$ per def. av U, og x er en mult. invers for a i U

s. 176 oppg. 38

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \Leftrightarrow a^2 - b^2 = a^2 - ab + ba - b^2$
$\Leftrightarrow ab = ba$

s. 176 oppg. 41

$\mathbb{Z}_p$ er kommutativ, så $(a+b)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^k b^{p-k}$
$= a^p + b^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k b^{p-k}$

$p \mid \binom{p}{k}$ for $k = 1, \ldots, p-1$, så $(a+b)^p = a^p + b^p$ i $\mathbb{Z}_p$

s. 176 oppg. 43

la a være en enhet i R s.a. $ab = ba = 1$ og $ac = ca = 1$ for $b, c \in R$.

Har $b = b \cdot 1 = b \cdot (ac) = (ba) \cdot c = 1 \cdot c = c$.

s. 176 oppg. 46

la $n, m \in \mathbb{Z}^+$ s.a. $a^n = b^m = 0$.

$(a+b)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} a^k b^{n+m-k} = 0 \Rightarrow a+b$ er nilpotent

R er kommutativ

Oppg. 3 eks. 2006

(a) Anta først at $H_{r,s}$ er en undergruppe av G.

$I_2 \in H_{r,s} \implies r = 1$ eller $s = 1$

Anta at $r = 1$. La $A \in H_{r,s}$ s.a. $\det A = s$. Har at $\det A^{-1} = \frac{1}{s}$ og $A^{-1} \in H_{r,s}$,

så $\frac{1}{s} = s$ eller $\frac{1}{s} = r = 1$ -X- siden $r < s$

$\implies s = 1$

La $B \in H_{r,s}$ s.a. $\det B = r$ Har at $\det B^{-1} = \frac{1}{r}$ og $B^{-1} \in H_{r,s}$,

så $\frac{1}{r} = r$ eller $\frac{1}{r} = s = 1$

$\implies \frac{1}{r} = r$ siden $r < s \implies r = 1$ eller $r = -1$

$\implies r = -1$ siden $r < s = 1$

$\implies (r,s) = (-1, 1)$

Anta nå at $(r,s) = (-1,1)$

$H_{-1,1} = \{A \in GL(2, \mathbb{Q}) \mid \det A = -1$ eller $\det A = 1\}$

1) $H_{-1,1}$ er lukket under multiplikasjon.

La $A, B \in H_{-1,1}$

$\det(AB) = \det A \det B \in \{-1, 1\}$ siden $\det A, \det B \in \{1, -1\}$

$\implies AB \in H_{-1,1}$

2) $I_2 \in H_{-1,1}$ siden $\det I_2 = 1$

3) La $A \in H_{-1,1}$

$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \in \{-1, 1\}$ siden $\det A \in \{1, -1\}$

$\implies A^{-1} \in H_{-1,1}$

$\implies H_{-1,1}$ er en undergruppe av G.

(b) Har allerede vist at $H_{-1,1}$ er en undergruppe av G.

$H_{-1,1}$ er normal i G:

La $A \in H_{-1,1}$, $B \in G$

$\det(BAB^{-1}) = \det B \det A \det B^{-1} = \det B \det B^{-1} \det A = \det A \in \{-1, 1\}$

$\implies BAB^{-1} \in H_{-1,1}$

Definerer
$$\varphi : G \longrightarrow \mathbb{Q}^+$$
$$A \longmapsto |\det A|$$

$\varphi(A) = 1 \iff |\det A| = 1 \iff \det A \in \{1, -1\} \iff A \in H_{-1,1}$

$\implies \operatorname{Ker} \varphi = H_{-1,1}$

$\implies G/H_{-1,1} \simeq \langle \mathbb{Q}^+, \cdot \rangle$

Oppg. 6 eks. 2006

$105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ La G være en gruppe av orden 105.

Ved Teorem 36.11 har G 1 eller 21 Sylow 5-undergrupper av orden 5 og 1 eller 15 Sylow 7-undergrupper av orden 7.

Anta at G har 21 Sylow 5-undergrupper og 15 Sylow 7-undergrupper

La H, K være to Sylow 5-undergrupper.

Har at $|H \cap K| < 5$ og $|H \cap K| \mid 5 \implies H \cap K = \{e\}$

$\implies G$ har $21 \cdot 4 = 84$ elementer av orden 5

Ved et lignende argument har vi at G har $15 \cdot 6 = 90$ elementer av orden 7

$\implies G$ må ha minst $84 + 90 = 174$ elementer. -X-

Det følger at G har en normal undergruppe av orden 7 eller 5.

Alternativ oppg. 7 s. 333:

La H være en Sylow 3-undergruppe, K en Sylow 5-undergruppe. Fra Eks. 37.12 vet vi at enten H eller K er normal i G, så HK er en undergruppe av G ved oppg. 40 s. 154. Har at $H \cap K = \{e\}$.

Ved Lem. 37.8 har vi at $|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|} = \frac{3 \cdot 5}{1} = 15$