

s. 66 oppg 17

$\mathbb{Z}_{30} = \{0, 1, \dots, 29\}$
 Vi skal finne den aktuelle elementene i undergruppen av \mathbb{Z}_{30} generert av 25.

$$0 \cdot 25 = 0$$

$$1 \cdot 25 = 25$$

$$2 \cdot 25 = 50$$

$$3 \cdot 25 = 75$$

$$4 \cdot 25 = 100$$

$$5 \cdot 25 = 125$$

$$6 \cdot 25 = 150$$

\Rightarrow Det er 6 elementer i denne syliske gruppen

Alternativt kan vi bruke Teorem 6.14 på side 64:

\mathbb{Z}_{30} er sylisk gruppe med 30 elementer, med 1 som generator.

$$25 = 25 \cdot 1$$

Ved teoremet genererer 25 en sylisk undergruppe av \mathbb{Z}_{30} med $\frac{30}{d}$ elementer, der $d = \text{gcd}(30, 25) = 5$.

s. 66 oppg. 23

I skal finne alle undergrupper av \mathbb{Z}_{36} . \mathbb{Z}_{36} er sylisk, og ved Teorem 6.6 på side 61 må alle undergrupper av \mathbb{Z}_{36} være sylisk. Ved Korollar 6.16 på side 65 er 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31 og 35 generatorer av \mathbb{Z}_{36} .

$$\langle 2 \rangle = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots, 34\}, \text{ endelig sylisk gruppe av orden } 18.$$

Igjen ved Kor. 6.16 er 2, 10, 14, 22, 26 og 34 generatorer av denne gruppa.

$$\langle 3 \rangle = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, \dots, 30, 33\}, \text{ endelig sylisk gruppe av orden } 12.$$

Ved Kor. 6.16 er 3, 15, 21 og 33 generatorer av denne gruppa

$$\langle 4 \rangle = \{0, 4, 8, 12, \dots, 28, 32\}, \text{ endelig sylisk gruppe av orden } 9.$$

Ved Kor. 6.16 er 4, 8, 16, 20, 28 og 32 generatorer av denne gruppa.

$$\langle 6 \rangle = \{0, 6, 12, 18, 24, 30\}, \text{ endelig sylisk gruppe av orden } 6.$$

Ved Kor. 6.16 er 6 og 30 generatorer av denne gruppa.

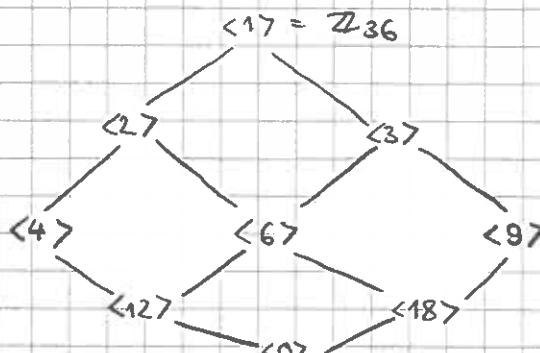
$$\langle 9 \rangle = \{0, 9, 18, 27\}, \text{ endelig sylisk gruppe av orden } 4.$$

Ved Kor. 6.16 er 9 og 27 generatorer av denne gruppa.

$$\langle 12 \rangle = \{0, 12, 24\}, \text{ endelig sylisk gruppe av orden } 3.$$

Ved Kor. 6.16 er 12 og 24 generatorer av denne gruppa.

$$\langle 18 \rangle = \{0, 18\}$$



S. 67 oppg. 36

Det finnes ingen uendelig cyklistisk gruppe med 4 generatorer.

Ved Teorem 6.10 må en uendelig cyklistisk gruppe være isomorf med $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$, og $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ har nøyaktig 2 generatorer, $+1$ og -1 .

S. 67 oppg. 44

(a) $x \in G$. siden G er cyklistisk med generator a , må det finnes en $n \in \mathbb{Z}$ slik at $x = a^n$.

$$\Rightarrow \phi(x) = \phi(a^n) = (\phi(a))^n = (\psi(a))^n = \psi(a^n) = \psi(x).$$

siden ϕ
er en homomorfisme

S. 67 oppg. 45

Vi skal vise at $S = \{nr+ms \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ er en undergruppe av \mathbb{Z} .

Vi bruker oppg. 45 på side 58 og viser at $a-b \in S \quad \forall a, b \in S$.

(a) $a = nr+ms, \quad b = n'r+m's \in S$.

$$a-b = nr+ms - (n'r+m's) = \underbrace{(n-n')}_{\in \mathbb{Z}} r + \underbrace{(m-m')}_{\in \mathbb{Z}} s \in S.$$

S. 67 oppg. 50

Vi følger hintet og ser på $(xax^{-1})^2$, for en nikklig $x \in G$.

$$(xax^{-1})^2 = (xax)(xax^{-1}) = x a (x^{-1} x) ax^{-1} = x a^2 x^{-1}$$

Siden a genererer en cyklistisk undergruppe av orden 2, må vi ha at $a^2 = e$, der e er identiteten i G .

$\Rightarrow (xax^{-1})^2 = x x^{-1} = e$, dvs at xax^{-1} genererer en cyklistisk undergruppe av orden 2.

Siden a er det eneste elementet i G som genererer en cyklistisk undergruppe av orden 2, må vi ha at $xax^{-1} = a$

$$\Rightarrow xa = ax.$$

S. 67 oppg. 51

\mathbb{Z}_{pq} er en cyklistisk gruppe av orden pq , med generator 1.

Ved Kor. 6.16 er generatorene av \mathbb{Z}_{pq} gitt ved $1 \cdot r$, der $\gcd(r, pq) = 1$.

Vi har at $\gcd(r, pq) + 1 \Leftrightarrow p \mid r$ eller $q \mid r$

$$p \mid r \Leftrightarrow r \in \underbrace{\{p, 2p, \dots, (q-1)p\}}_{q \text{ elementer}}, \quad q \mid r \Leftrightarrow r \in \underbrace{\{q, 2q, \dots, (p-1)q\}}_{p \text{ elementer}}$$

r kan ikke være et multiplum av p og q samtidig siden p og q er primtall og $r < pq$.

$\Rightarrow \mathbb{Z}_{pq}$ har $pq - q - p + 1$ generatorer.

$$(p-1)(q-1)$$

S. 68 oppg. 53

(a) G være en endelig cyklistisk gruppe av orden n .

Ser på ligningen $x^m = e$, der $m \mid n$.

$$m \mid n \Rightarrow \exists d \in \mathbb{Z} \text{ s. a. } n = md$$

(a) a være en generator for G , dvs $G = \langle a \rangle = \{e, a, \dots, a^{n-1}\}$ og nes det minste heltallet s. a. $a^n = e$.

$$e = a^n = a^{md} = (a^d)^m \Rightarrow a^d \text{ er en løsning av ligningen } x^m = e.$$

$$\text{La } b_i = (a^d)^i, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Har at $b_i = ((a^d)^i)^m = ((a^d)^m)^i = e$, så b_i er en løsning $\forall i, 1 \leq i \leq m$.

$$b_i = b_j \Leftrightarrow a^{di} = a^{dj} \Leftrightarrow a^{d(i-j)} = e \quad \text{for } i \neq j, \quad 1 \leq i, j \leq m$$

$d(i-j) < dm = n$, så $b_i \neq b_j \quad \forall i \neq j$

Vi har nå nist at det finnes minst m løsninger.

ta x være en løsning: $x^m = e$

$\exists k \text{ s.a. } a^k = x$

$$\Rightarrow a^{km} = e$$

$$\Rightarrow n \mid km$$

\forall har at $n \mid dm$, så $d \mid k$.

\Rightarrow Alle løsningene må være på formen a^{di} , der $i \in \{1, \dots, m\}$

Dette viser at det ikke finnes flere løsninger.

Alt.:

Ved Teorem 6.10 er G isomorf med $\langle \mathbb{Z}_n, +_n \rangle$.

Ligningen $x^m = e$ i G blir til $mx = 0$ i \mathbb{Z}_n .

La $d \in \mathbb{Z}$ s.a. $n \mid md$.

$$mx = 0 \Leftrightarrow md = n \mid mx \Leftrightarrow d \mid x$$

\Rightarrow Alle løsninger må være på formen di , der $i \in \{1, \dots, m\}$

Vi har at $m(di) = (md)i = ni = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$.

Dette viser at di er en løsning $\forall i \in \{1, \dots, m\}$.

Det gjenstår å vise at $di \neq dj$ for $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq m$.

$$di = dj \Rightarrow d(i-j) = 0 \Rightarrow i=j \text{ siden } d(i-j) \leq dm = n \quad \forall i, j$$

s. 83 oppg 3

$$\begin{aligned} \mu \sigma^2 &= \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 6 & 4 \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 & 2 \end{smallmatrix} \right)^2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 & 6 \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 6 & 2 & 1 \end{smallmatrix} \right) \\ &= \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 2 & 5 \end{smallmatrix} \right) \end{aligned}$$

s. 83 oppg 9

$$\mu^{100} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{smallmatrix} \right) = e$$

s. 84 oppg. 17

$$S = \{ \sigma \in S_5 \mid \sigma(2) = 5 \}$$

$$|S| = 4! = 24$$

s. 84 oppg. 20

P^0	P	P^2	P^3	P^4	P^5
P^0	P^0	P	P^2	P^3	P^4
P	P^1	P^2	P^3	P^4	P^5
P^2	P^1	P^3	P^4	P^5	P^0
P^3	P^2	P^4	P^5	P^0	P
P^4	P^3	P^5	P^0	P	P^2
P^5	P^4	P^0	P	P^2	P^3

$$P = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 6 \end{smallmatrix} \right) \quad P^2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 6 \end{smallmatrix} \right)$$

$$P^3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{smallmatrix} \right) \quad P^4 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 6 \end{smallmatrix} \right)$$

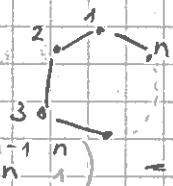
$$P^5 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{smallmatrix} \right) \quad P^6 = P^0 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 5 \end{smallmatrix} \right)$$

Denne gruppen er abelsk og kan derfor ikke være isomorf med S_3 , som

ikke er abelsk: $(1 \ 2 \ 3)(3 \ 2 \ 1) = (1 \ 3 \ 2)$, $(1 \ 3 \ 2)(1 \ 2 \ 3) = (1 \ 2 \ 3)$

S. 86 oppg 44

For hvert n-gon



har n rotasjoner

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3\ 4\ \cdots\ n), \quad \sigma^2, \dots, \sigma^n = \text{id}$$

og n speilinger : hvis n er odd, har n hjørne-metstående kant speilinger, hvis n er like, har n $\frac{n}{2}$ hjørne-hjørne speilinger og $\frac{n}{2}$ kant-kant speilinger

$$\Rightarrow |D_n| = 2n$$

$$\Leftrightarrow \text{har orden } \frac{2n}{2} = n$$

S. 86 oppg 46

(13)

(12)

"

For $n > 3$ kan n se på permutterasjonene
Vi har at $(13)(12) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 1 & 4 & \cdots & n \end{pmatrix}$ og at

$$(12)(13) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 3 & 1 & 2 & 4 & \cdots & n \end{pmatrix} = (1\ 3\ 2)$$

$$\Rightarrow (13)(12) \neq (12)(13)$$

$\Rightarrow S_n$ kan ikke være abelsk

S. 86 oppg 47.

La $n \geq 3$

Vi antar at det finnes en idt $\sigma \in S_n$ s.t. $\sigma x = x\sigma \quad \forall x \in S_n$.

Det finnes også $i \in \{1, \dots, n\}$ s.t. $\sigma(i) = m + i$.

La $x \in S_n$, s.t. $x(i) = l$, $x(m) = r \neq m$. (Dette er mulig siden $n \geq 3$.)

$$\Rightarrow \sigma x(i) = \sigma(l) = m + l \neq r = x(m) = x\sigma(i).$$

Dette er en selv motsgjelse, så $\sigma(i) = i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow \sigma = \text{id}$

S. 84 oppg 1

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} 1 \xrightarrow{P} 5 \xrightarrow{P} 2 \xrightarrow{P} 1 \\ 3 \xrightarrow{P} 3 \\ 4 \xrightarrow{P} 6 \xrightarrow{P} 4 \end{array}$$

$\{1, 2, 5\}$

$\{3\}$

$\{4, 6\}$

S. 94 oppg 9

$$(1\ 2)(4\ 7\ 6)(2\ 1)(7\ 2\ 8\ 15) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 3 & 7 & 8 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

S. 94 oppg 11

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 8 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 4)(2\ 6)(5\ 8\ 7) = (1\ 4)(1\ 3)(2\ 6)(5\ 7)(5\ 8)$$