NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i

MA2106 Kompleks funksjonsteori og differensialligninger LF

Faglig kontakt under eksamen:

Tlf:

Eksamensdato: 14. desember 2023

Eksamenstid (fra–til): 09:00-13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler:

Annen informasjon:

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 4

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Merk! Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.

Oppgave 1 Vi finner at

$$e^{e^{x+iy}} = e^{e^x \cos y + ie^x \sin y} = e^{e^x \cos y}\Big(\cos(e^x \sin y) + i \sin(e^x \sin y)\Big),$$

så vi kan slutte at $u(x, y) = e^{e^x \cos y} \cos(e^x \sin y)$ og $v(x, y) = e^{e^x \cos y} \sin(e^x \sin y)$.

Oppgave 2 Vi skriver $f(z) = x^2 - y^2 - i2xy =: u + iv$. Vi har dermed $u_x = 2x$ og $u_y = -2x$, så $u_x = v_y$ holder bare når $x = 0$. Likeledes har vi $u_y = -2y$ of $v_x = -2y$, og derfor har vi bare $u_y = -v_x$ når $y = 0$. Av dette følger at Cauchy–Riemann-ligningene bare er oppfylt når $x = y = 0$. For å vise at $f'(0) = 0$ kan vi enten appellere til at u og v har kontinuerlig partiellderiverte slik at $f'(0) = u_x(0, 0) + iv_x(0, 0) = 0$ eller regne ut direkte:

$$\lim_{z \to 0} \frac{|\overline{z}^2 - 0|}{|z - 0|} = \lim_{z \to 0} |z| = 0,$$

slik at $f'(0) = 0$.

Oppgave 3 Ved identitetsteoremet er en analytisk funksjon fullstendig bestemt av verdiene den tar på et linjestykke. I dette tilfellet er det klart at funksjonen må være på formen

$$f(z) = z \log z,$$

hvor $\log z$ er en gren av logaritmen som er reell for positive z. For $z = -1 - i$ vil imaginærdelen til $\log z$ være $5\pi/4$ siden området vårt består av alle tall på formen $re^{i\theta}$ med $-\frac{-\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$. Dermed får vi

$$f(-1 - i) = (-1 - i)\Big(\ln|1 - i| + i\frac{5}{4}\pi\Big) = -\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{5}{4}\pi - i\Big(\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{5}{4}\pi\Big).$$

Oppgave 4 Siden $\lim_{z \to 0} f(z)$ ikke eksisterer, er 0 verken en hevbar singularitet eller en pol. Vi kan derfor slutte at 0 er en essensiell singularitet. Ved Casorati–Weierstrass-teoremet finnes det for ethvert komplekst tall c en følge $\{z_n\}$ slik at $\lim_{n \to \infty} z_n = 0$ og $\lim_{n \to \infty} f(z_n) = c$.

Oppgave 5

a) Om vi setter $f_n(z) := 5z^n + 1$, ser vi at

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1(0)} \frac{z^{n-1}}{5z^n+1}dz = \frac{1}{5n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1(0)}\frac{f_n'(z)}{f_n(z)}dz.$$

Vi vet at integralet på høyresiden er $2\pi i$ ganger antall nullpunkter f har på innsiden av enhetssirkelen. De n nullpunktene til f ligger alle på sirkelen $|z| = 5^{-1/n} < 1$, og derfor får vi

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1(0)} \frac{z^{n-1}}{5z^n+1}dz = \frac{1}{5}.$$

b) Siden $1/(x^2+1)$ og $\cos x$ er jevne funksjoner, har vi

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(bx)}{x^2+1}dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{e^{i|b|x}}{x^2+1}dx.$$

Funksjonen $f(x) := 1/(z^2+1)$ har enkle poler i punktene $\pm i$. Ved residyteoremet finner vi derfor at

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(bx)}{x^2+1}dx &= 2\pi i\frac{e^{-|b|}}{2i} - \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{iRe^{i\theta}e^{i|b|Re^{i\theta}}d\theta}{R^2e^{i2\theta}+1}\\ &= \pi e^{-|b|}.\end{aligned}$$

Her brukte vi at

$$\left|\int_0^{\pi}\frac{iRe^{i\theta}e^{i|b|e^{i\theta}}d\theta}{R^2e^{i2\theta}+1}\right| \le \frac{\pi R}{R^2-1} \to 0$$

når $R\to\infty$.

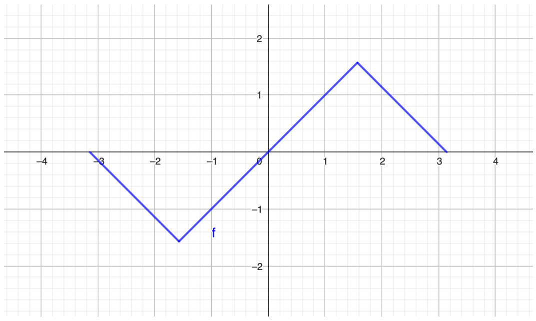
Oppgave 6 La f være en odde 2π-periodisk funksjon slik at $f(x) = \frac{\pi}{2} - \left|x - \frac{\pi}{2}\right|$ for $0 \le x \le \pi$.

a) Se figur 1 for en skisse av f. Siden f er en odde funksjon, har vi $\widehat{f}(0) = 0$ og

$$\widehat{f}(n) = \frac{-i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

når $n \neq 0$. Siden sinus er en odde funksjon, er det klart at $\widehat{f}(n) = -\widehat{f}(-n)$. Når $n > 0$, har vi

$$\widehat{f}(n) = \frac{-i}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi i}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$



Figur 1: Funksjonen i oppgave 6a).

Siden $f(x) = f(\pi - x)$ og $\sin(2kx) = -\sin(-2kx) = -\sin(2k(\pi - x))$, er dette integralet 0 når $n = 2k$. Når $n = 2k+1$, har vi $\sin(2nx) = \sin(2n(\pi - x)$ og dermed

$$\widehat{f}(n) = \frac{2}{\pi i}\int_0^{\pi/2} x \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi i n}\int_0^{\pi/2} \cos nx \, dx = \frac{2(-1)^k}{\pi i (2k+1)^2},$$

der vi brukte delvis integrasjon.

b) Funksjonen f tilfredsstiller Lipschitz-betingelsen $|f(x+t) - f(x)| \leq |t|$. Derfor konvergerer Fourier-rekken til f mot $f(x)$ for alle x. Spesielt får vi at

$$\frac{\pi}{2} = f\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin\Big(n\frac{\pi}{2}\Big) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

som viser at

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

c) Når $u(x,t) = X(x)T(t)$, får ligningen $u_t = u_{xx} + u$ formen $X(x)T'(t) = X''(x)T(t) + X(x)T(t)$ som gir

$$T'(t)/T(t) = X''(x)/X(x) + 1.$$

Skal denne ligningen holde for alle t og x, må vi ha $X'' = kX$ og $T' = (k+1)T$ for en konstant k. Siden vi skal ha $X(0) = X(\pi) = 0$, må vi ha $k < 0$ siden vi ellers bare vil få den trivielle løsningen $X \equiv 0$. Når $k < 0$, får vi $X(x) = A \sin \sqrt{-k}x$ som gir $\sqrt{-k} = n$ for et heltall $n \geq 1$. Det gir videre $T(t) = Be^{-(n^2-1)t}$. Løsningene på formen $X(x)T(t)$ blir dermed

$$u(x,t) = C_n e^{-(n^2-1)t} \sin nx, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Funksjonen $u(x,t)$ på rekkeform som løser (1) og (2) slik at $u(x,0)=f(x)$ for $0<x<\pi$ blir

$$u(x,t)=\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m e^{-((2m+1)^2-1)t}}{(2m+1)^2}\sin(2m+1)x.$$

Oppgave 7 La P være et polynom av grad $n\geq 1$. Anta P ikke har noe nullpunkt. Da er $f=1/P$ en hel funksjon. Ved maksimum-modulus-prinsippet har vi at

$$|f(z)|\leq \max_{|w|=R}|f(w)|$$

når $|z|<R$. Men siden $\min_{|w|=R}P(w)\to\infty$ når $R\to\infty$, impliserer dette at $f(z)=0$ for alle z. Dette er en motsigelse siden antagelsen var at P er et polynom av grad $n\geq 1$.