Noregs teknisk–naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

MA2106 Kompleks funksjonsteori og differensiallikningar
Haust 2023

Løysingsforslag øving 11

1 **a)** Sjå på funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ 0 & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi). \end{cases}$$

Finn Fourier-cosinusrekkja til f, og finn verdien av rekkja i punkta $x = 0, x = \frac{\pi}{2}$ og $x = \pi$.

Løysing: Vi nytter formlane for Fourier-cosinuskoeffisientar:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{1}{2}.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi n}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\sin(\frac{n\pi}{2})}{\pi n}$$

$$\begin{cases} 0 & n = 2k \\ \frac{2}{\pi n} & n = 1 + 4k \\ -\frac{2}{\pi n} & 3 + 4k. \end{cases}$$

Dermed vert rekkja

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos((1+2n)x)}{1+2n}.$$

For $x = 0$ får vi

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+2n}.$$

Vi kjenner att summen som taylorrekkja til $\arctan(x)$ i $x = 1$, så summen blir $\frac{\pi}{4}$, og dermed har vi

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\frac{\pi}{4} = 1.$$

I $x = \frac{\pi}{2}$ har vi:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos((1+2n)\frac{\pi}{2})}{1+2n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} 0 = \frac{1}{2}.$$

I $x = \pi$ har vi

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos((1+2n)\pi)}{1+2n}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos(\pi)}{1+2n} = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+2n} = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\frac{\pi}{4} = 0.$$

b) Finn alle funksjonar på produktforma $u(x,t) = X(x)T(t)$ som løyser randverdiproblemet

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & (x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty) \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

Løysing: Dersom vi startar med ein produktfunksjon, og så gjer variabelseparasjon som vanleg(altså som i seksjon 11.5) ender vi opp med difflikningene

$$X'' = \lambda X \qquad T' = \lambda T,$$

der λ er negativ, som i boka. Vi ender dermed opp med

$$X(x) = A\sin(\sqrt{-\lambda}x) + B\cos(\sqrt{-\lambda}x) \qquad T(t) = Ce^{\lambda t}.$$

Vi sjekker kva slags verdiar av A, B og λ som gjer at X tilfredsstiller randkrava. Vi har at

$$\begin{aligned} 0 = u_x(0,t) &= \left(A\sqrt{-\lambda}\cos(\sqrt{-\lambda}\cdot 0) - B\sqrt{-\lambda}\sin(-\sqrt{\lambda}\cdot 0)\right) Ce^{\lambda t} \\ &= \left(A\sqrt{-\lambda}\cos(\sqrt{-\lambda}\cdot 0)\right) Ce^{\lambda t}, \end{aligned}$$

så vi må ha $A = 0$. På den andre randverdien får vi dermed

$$0 = u_x(\pi,t) = \left(-B\sqrt{-\lambda}\sin(-\sqrt{\lambda}\pi)\right) Ce^{\lambda t}.$$

Dei ikkje-trivielle løysingene her er når $\sqrt{-\lambda}$ er eit naturleg tal, eller 0. Vi skriv derfor $n = \sqrt{-\lambda}$ og får at produktløysingene på likninga er

$$u_n(x,t) = C_n\cos(nx)e^{-n^2 t}.$$

Vi kan lett sjekke at alle u_n løyser differensiallikninga og tilfredsstiller randverdiane.

c) Finn ein funksjon som løyser difflikninga i b), men som i tillegg oppfyller randkravet $u(x,0) = f(x)$.

Løysing: Kandidaten vår er

$$y(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos((1+2n)x)e^{-n^2 t}}{1+2n}.$$

Ved superposisjon vil denne funksjonen både løyse difflikninga og tilfredsstille rand- og intitialkrava så lenge vi kan vise at rekkja konvergerer. Til dette nytter vi Dirichlet-testen. Vi let $a_n = \frac{1}{1+2n}$ og $b_n = (-1)^n\cos((1+2n)x)e^{-n^2 t}$. Vi ser klart at a_n er monotont synkande og går mot 0. Samstundes har vi

$$\begin{aligned} \left|\sum_{n=0}^{M}(-1)^n\cos((1+2n)x)e^{-n^2 t}\right| &\leq \sum_{n=0}^{M}\left|(-1)^n\cos((1+2n)x)e^{-n^2 t}\right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{M} e^{-n^2 t} = \sum_{n=0}^{M}\frac{1}{e^{n^2 t}}. \end{aligned}$$

Sidan $e^{n^2 t}$ veks raskare enn n^2 fins det ein konstant N slik at når $n \geq N$ er $e^{n^2 t} > n^2$. Dermed har vi for $M \geq N$ at

$$\sum_{n=0}^{M}\frac{1}{e^{n^2 t}} = \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{e^{n^2 t}} + \sum_{n=N+1}^{M}\frac{1}{e^{n^2 t}} \leq C + \sum_{n=N+1}^{M}\frac{1}{n^2} \leq C + \frac{\pi^2}{6}.$$

Dermed konvergerer rekkja punktvis, per Dirichlet-testen, og kanditatfunksjonen vår løyser dermed heile problemet.

2 **a)** Vi ser på den 2π-periodiske funksjonen definert ved $f(x) = \cosh(x)$ for $x \in [-\pi, \pi]$. Forklar kvifor alle fourierkoeffisientane er reelle, og kvifor $c_n = c_{-n}$ for alle n. Finn så c_n for $n \geq 0$.

Løysing: Vi har at

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cosh(x)e^{-inx}\,dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cosh(x)\cos(nx)\,dx - \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cosh(x)\sin(nx)\,dx.$$

Sidan cosh er jamn, medan sin er odde, er integranden odde, og sidan vi integrerer over eit symmetrisk intervall vil imaginærdelen til fourierkoeffisienten bli 0, og vi får at

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cosh(x)\cos(nx)\,dx,$$

som er eit heilt vanleg integral, og dermed eit reellt tal. Vidare har vi at

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cosh(x)\cos(-nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cosh(x)\cos(nx)\,dx = c_n.$$

Dette er riktig sidan cos er jamn. Til slutt rekner vi koeffisientane.

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cosh(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{x} + e^{-x}\right)e^{-inx}\,dx$$
$$= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)x} + e^{(-1-in)x}\,dx = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{e^{(1-in)x}}{1-in} + \frac{e^{(-1-in)x}}{-1-in}\right]_{-\pi}^{\pi}$$
$$= \frac{e^{-in\pi}}{4\pi}\left(\frac{e^{\pi}}{1-in} + \frac{e^{-\pi}}{-1-in}\right) - \frac{e^{in\pi}}{4\pi}\left(\frac{e^{-\pi}}{1-in} + \frac{e^{\pi}}{-1-in}\right)$$
$$= \frac{(-1)^n}{4\pi}\left(\frac{2\sinh(\pi)}{1-in} + \frac{2\sinh(\pi)}{1+in}\right) = \frac{(-1)^n}{4\pi}\frac{4\sinh(\pi)}{1+n^2} = (-1)^n\frac{\sinh(\pi)}{\pi(1+n^2)}.$$

b) Nytt konvergens av fourierrekkjer til å vise at

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi}{2\tanh(\pi)} + \frac{1}{2}.$$

Løysing: Vi må vise at $\cosh x$ er Lipschitz-kontinuerleg på $[-\pi, \pi]$. Frå mellomverdisetninga har vi

$$|\cosh(x) - \cosh(y)| = |\sinh(c)(x-y)| = |\sinh(c)||x-y| \leq \sinh(\pi)|x-y|.$$

Dermed er cosh Lipschitz-kontinuerleg på $[-\pi, \pi]$ og følgjeleg konvergerer fourierrekkja punktvis mot cosh. Med andre ord har vi

$$\frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \frac{2\sinh(\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}\cos(nx) = \cosh x$$

for alle $x \in [-\pi, \pi]$. Meir spesifikt, for $x = \pi$ har vi då

$$\cosh(\pi) = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \frac{2\sinh(\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}\cos(n\pi)$$

$$= \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \frac{2\sinh(\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}(-1)^n = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \frac{2\sinh(\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$$

$$= \frac{2\sinh(\pi)}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+n^2} - \frac{\sinh(\pi)}{\pi}.$$

Der vi i siste linje har skifta indeksen ved trekkje frå $\frac{\sinh(\pi)}{\pi}$. Dersom vi no deler på $\frac{2\sinh(\pi)}{\pi}$ på beggje sider av likskapen får vi

$$\frac{\pi\cosh(\pi)}{2\sinh(\pi)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+n^2} - \frac{1}{2}$$

$$\iff \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi}{2\tanh(\pi)} + \frac{1}{2}.$$

c) Forklar kvifor $u_n(z) = r^n\cos(n\theta)$ gjev ei kontinuerleg løysing på Dirichlet-problemet

$$\begin{cases}\Delta u = 0 \quad (r,\theta)\in[0,1)\times(-\pi,\pi] \\ u(e^{i\theta}) = \cos(n\theta).\end{cases}$$

Nytt dette til å løyse Dirichlet-problemet

$$\begin{cases}\Delta u = 0 \quad (r,\theta)\in[0,1)\times(-\pi,\pi] \\ u(e^{i\theta}) = f(\theta).\end{cases}$$

Løysing: Vi kan såklart derivere u_n for å verifisere at den er harmonisk, men det er enklare å merka seg at $z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$, så u_n er realdelen til den holomorfe funksjonen z^n, og er dermed harmonisk. Sidan u_n er veldefinert også for $r = 1$ er det også klart at u_n er kontinuerleg, ikkje berre på $[0,1)\times(-\pi,\pi]$, men på $[0,1]\times(-\pi,\pi]$. Dermed kan vi nytte grenseverdiar til å sjå at u_n også tilfredsstiller randkravet. Vi kan no konstruere ein funksjon som tilfredsstiller randkravet $u(e^{i\theta}) = \cosh(\theta)$ ved superposisjon. Fourierrekkja til cosh har vi frå a), og vi veit at den konvergerer punktvis frå b). Løysingsfunksjonen blir

$$u(z) = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \frac{2\sinh(\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n r^n}{1+n^2}\cos(nx).$$

Funksjonen er harmonisk via superposisjon, og tilfredsstiller randkravet via b). Kontinuitet ser vi frå Weierstrass-M-testen.

$\boxed{3}$ **a)** For to dobbeltderiverbare funksjonar $F, G : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, vis at

$$y(x,t) = F(x+at) + G(x-at)$$

løyser bølgelikninga $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Løysing: Vi deriverer y med kjerneregelen og får

$$\frac{\partial y}{\partial t} = aF'(x+at) - aG'(x-at),$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 F''(x+at) + a^2 G''(x-at).$$

Tilsvarande får vi

$$\frac{\partial y}{\partial x} = F'(x+at) + G'(x-at),$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = F''(x+at) + G''(x-at).$$

Vi ser dermed at y løyser bølgelikninga.

b) Vis at dersom vi nytter variabelskiftet $\alpha = x+at, \beta = x-at$ så blir bølgelikninga

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta} = 0.$$

Utled også formelen for y ved å integrere den nye bølgelikninga to gonger.

Løysing: Vi løyser oppgåva med kjerneregelen i to variablar. $u = u(x,t)$, så dersom vi vil skrive u som $u(\alpha,\beta)$ må vi skrive $u(\alpha,\beta) = u(T(\alpha,\beta))$, der T er variabelskiftetransformasjonen:

$$T(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2} \\ \frac{\alpha-\beta}{2a} \end{pmatrix},$$

No gjev kjerneregelen oss at

$$\frac{\partial u}{\partial\beta} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\beta} + \frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial\beta} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2a}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Vidare får vi at

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial\beta}\right) = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2a}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial\alpha} + \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial\alpha}\right) - \frac{1}{2a}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\cdot\frac{\partial x}{\partial\beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial t}{\partial\beta}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{4a}\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x} - \frac{1}{4a}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t} - \frac{1}{4a}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Sidan u er kontinuerleg dobbeltderiverbar er $\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}$, så uttrykket over er lik

$$\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{4a}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

og sidan u oppfyller bølgelikninga blir dette 0. Vi har altså fått at $\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta} = 0$. Dette er ei separabel differensiallikning, så vi kan løyse med integrasjon.

$$\frac{\partial u}{\partial\beta} = \int \frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}\, d\alpha \int 0\, d\alpha = C(\beta),$$

som gjer at

$$u = \int C(\beta)\, d\beta = G(\beta) + D(\alpha).$$

Her er G den antideriverte til C. Dersom vi no skriv $F = C$ har vi at $u(\alpha,\beta) = F(\alpha) + G(\beta)$, så når vi bytter tilbake til x og t får vi

$$u(x,t) = F(x+at) + G(x-at).$$

4 Løys randverdiproblemet

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \\ u(0,t) = 0 = u(\pi,t) \\ u_t(x,0) = 0 \\ u(x,0) = \frac{1}{\pi}x(\pi - x), \end{cases}$$

på området $[0,\pi] \times [0,\infty)$.

Løysing: Den vanlege framgangsmåten her er variabelseparasjon for å finne løysinger på produktform som tilfredsstiller randverdiane, og så superposisjon av løysinger for å tilfredsstilla initialverdien. Sidan oppstillinga i oppgåva er heilt lik den som er gitt i seksjon 11.4.6 i boka treng vi ikkje å gjera variabelseparsjon her, sidan vi veit at produktløysingene på dette problemet er $u_n(x,t) = \sin(nx)\cos(nt)$(sjekk sjølv at desse funksjonane tilfredsstiller dei tre første krava i difflikninga). Vi må no kombinere løysinger for å tilfredsstille initialverdien. Vi veit at dette berre går når koeffisientane til funksjonen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)\cos(nt)$ er Fourier-sinus-koeffisientane til $\frac{1}{\pi}x(\pi - x)$(fordi vi må utvide f på ein odde måte til intervallet $[-\pi,\pi]$.) Koeffisientane er dermed

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{x}{\pi}(\pi - x)\sin(nx)\,dx &= \frac{2}{\pi^2}\left(\left[-x(\pi - x)\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi + \int_0^\pi (\pi - 2x)\frac{\cos(nx)}{n}\,dx\right) \\
&= \frac{2}{\pi^2 n}\int_0^\pi (\pi - 2x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi^2 n}\left(\left[(\pi - 2x)\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^\pi + \int_0^\pi 2\frac{\sin(nx)}{n}\,dx\right) \\
&= \frac{4}{\pi^2 n^2}\int_0^\pi \sin(nx)\,dx = \frac{4}{\pi^3 n^3}[-\cos(nx)]_0^\pi = \frac{4}{\pi^2 n^3}\left((-1)^{n+1} + 1\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{8}{\pi^2 n^3} \; n \text{ odde} \\ 0 \; n \text{ jamn} \end{cases}.$$

Sidan $\frac{x}{\pi}(\pi - x)$ er Lipschitz-kontinuerleg(sidan den er kontinuerleg på $[0,\pi]$) konvergerer fourierrekkja mot $\frac{x}{\pi}(\pi - x)$, og vi har dermed at løysinga på randverdiproblemet er

$$y(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{\pi^2(2n+1)^3}\sin((2n+1)x)\cos((2n+1)t).$$

Sidan produktløysingene tilfredsstiller dei tre øverste betingelsane gjer også y det, ved superposisjon. For å sjekke det siste kravet nytter vi punktvis konvergens av fourierrekkjer:

$$\begin{aligned}
y(x,0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{\pi^2(2n+1)^3}\sin((2n+1)x)\cos(0) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{\pi^2(2n+1)^3}\sin((2n+1)x) = \frac{x}{\pi}(\pi - x).
\end{aligned}$$