DEN INVERSE TIL EN UNIVALENT FUNKSJON ER HOLOMORF

Målet med dette notatet er å løse oppgave IV.14.1 i Sarason: *La $f : G \to \mathbb{C}$ være univalent med kontinuerlig invers funksjon $g : F(G) \to G$. Anta at $f'(z) \neq 0$ for alle z i G og at $f(G)$ er en åpen mengde. Da er g holomorf.*

Det vises senere i boka at de tre antagelsene er overflødige, det vil si at hvis f er univalent, så har vi automatisk at g er kontinuerlig, $f'(z) \neq 0$ for alle z i G og at $f(G)$ er en åpen mengde. Oppgaven reduserer dermed det å vise at g er holomorf til å vise disse tre implikasjonene. (Merk at i det spesielle tilfellet vi så på i forelesningen med $f(z) = e^z$ og g en gren av logaritmen er det rett frem å vise disse implikasjonene.)

Nedenstående løsning er et ypperlig eksempel på hvordan vi kan bruke reformuleringen av deriverbarhet ved hjelp av lineær approksimasjon (se II.2 i Sarason).

Løsning. Vår oppgave er å vise at vi for enhver z_0 har at

$$g(z) - g(z_0) = a(z - z_0) + Q(z), \tag{1}$$

hvor $a = a(z_0)$ og $Q(z)/(z - z_0) \to 0$ når $z \to z_0$. (NB! Merk at det gir mening å la $z \to z_0$ fordi $f(G)$ er åpen. Vi underforstår altså at vi i grenseprosessen ser på alle z i en liten omegn om z_0.)

La nå $z = f(w)$ og $z_0 = f(w_0)$, hvor w, w_0 er i G. Da har vi

$$g(z) - g(z_0) = w - w_0.$$

Siden vi har per antagelse at f er holomorf og $f'(w_0) \neq 0$, har vi ved lineær approksimasjon (det vil si $f(w) - f(w_0) = f'(w_0)(w - w_0) + R(w)$) at

$$g(z) - g(z_0) = \frac{1}{f'(w_0)}(f(w) - f(w_0)) - \frac{1}{f'(w_0)}R(w) = \frac{1}{f'(w_0)}(z - z_0) - \frac{1}{f'(w_0)}R(w),$$

hvor $R(w)/(w - w_0) \to 0$ når $w \to w_0$. Nå er det viktig å observere at $w \to w_0$ når $z \to z_0$ ved vår antagelse om at g er kontinuerlig. Vi har derfor at

$$\frac{R(w)}{z - z_0} = \frac{R(w)}{(w - w_0)} \cdot \frac{(w - w_0)}{(z - z_0)} \to 0 \cdot \frac{1}{f'(w_0)} = 0$$

når $z \to z_0$. Setter vi til slutt $Q(z) = -R(w)/f'(w_0)$, ser vi at vi har bevist (1).

Merk at vårt bevis gir det forventede resultat

$$g'(z_0) = \frac{1}{f'(w_0)}.$$

Date: 8. september 2023.