Institutt for matematiske fag

# Eksamensoppgave i
# MA2106 Kompleks funksjonsteori og differensialligninger

**Faglig kontakt under eksamen:** Kristian Seip

**Tlf:** 91129136

**Eksamensdato:** 14. desember 2023

**Eksamenstid (fra–til):** 09:00-13:00

**Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler:** D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

**Annen informasjon:**
Denne prøven består av 10 delpunkt som alle teller like mye. Svarene på oppgavene skal være godt begrunnet.

**Målform/språk:** bokmål

**Antall sider:** 2

**Antall sider vedlegg:** 2

**Kontrollert av:**

Dato Sign

Merk! Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.

**Oppgave 1** Finn henholdsvis realdelen $u(x, y)$ og imaginærdelen $v(x, y)$ til den hele funksjonen $e^{e^z}$.

**Oppgave 2** Sett $f(z) = \overline{z}^2$. Vis at $f'(z)$ eksisterer for kun ett punkt $z$ i $\mathbb{C}$. Identifiser dette punktet og avgjør hva $f'(z)$ er for denne verdien av $z$. (Hint: Du kan bruke Cauchy–Riemann-ligningene.)

**Oppgave 3** La $f$ være en analytisk funksjon på $\mathbb{C} \setminus \{z | \ z = iy, y \leq 0\}$ slik at $f(x) = x \ln x$ når $0 < x < 1$. Forklar først hvorfor $f$ er fullstendig bestemt av disse opplysningene. Beregn deretter $f(-1 - i)$.

**Oppgave 4** La $f$ være en analytisk funksjon på $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Anta det finnes to følger $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ og $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ slik at

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \quad \text{og} \quad \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} (f(b_n) - 1) = 0.$$

Forklar hvorfor følgende holder: For ethvert komplekst tall $c$ finnes en følge $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ slik at

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0 \quad \text{og} \quad \lim_{n\to\infty} f(z_n) = c.$$

**Oppgave 5**

**a)** Bruk telleargumentet som ligger til grunn for argumentprinsippet til å beregne

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1(0)} \frac{z^{n-1}}{5z^n + 1} dz,$$

der $n$ er et positivt heltall og $C_1(0)$ er den positivt orienterte enhetssirkelen.

**b)** Beregn det uegentlige integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(bx)}{x^2 + 1} dx,$$

der $b$ er et vilkårlig reelt tall. (Hint: Du kan nøye deg med å regne ut integralet for ikke-negative $b$ siden det bare avhenger av $|b|$.)

**Oppgave 6** La $f$ være en odde $2\pi$-periodisk funksjon slik at $f(x) = \frac{\pi}{2} - \left|x - \frac{\pi}{2}\right|$ for $0 \le x \le \pi$.

**a)** Skissér grafen til $f$. Forklar hvorfor $\widehat{f}(n)$ er imaginær og $\widehat{f}(n) = -\widehat{f}(-n)$ for alle heltall $n$. Påvis deretter at $\widehat{f}(2n) = 0$ for alle $n$, og finn så $\widehat{f}(2n+1)$ for alle ikkenegative tall $n$. (Hint: Beregningene kan her forenkles ved at man utnytter symmetrien om punktet $x = \frac{\pi}{2}$.)

**b)** Bruk resultatet i punkt a) og det du vet om konvergens av Fourier-rekker til å vise at

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

**c)** Finn alle funksjoner på formen $u(x,t) = X(x)T(t)$ slik at

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + u(x,t), \quad 0 < x < \pi, t > 0; \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t > 0. \tag{2}$$

Skriv ned en funksjon $u(x,t)$ på rekkeform som løser (1) og (2) slik at $u(x,0) = f(x)$ for $0 < x < \pi$, der $f$ er funksjonen fra punkt a).

**Oppgave 7** Algebraens fundamentalteorem sier at et polynom av grad $n \ge 1$ har minst ett nullpunkt. Bruk maksimum-modulus-prinsippet til å vise dette resultatet.

**Noen nyttige formler**

De Moivres formel: $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

Cauchy–Riemann-ligningene: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

Laplace-operatoren i to variable: $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Noen komplekse funksjoner:

$$e^z = \exp(z) = e^x(\cos(y) + i\sin(y)),$$

$$\log(z) = \ln(|z|) + i\,\arg(z), \quad \mathrm{Ln}(z) = \mathrm{Log}(z) = \ln(|z|) + i\,\mathrm{Arg}(z),$$

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Cauchys generaliserte formel:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta.$$

Jordans lemma:

$$\int_0^\pi e^{-R\sin\theta} d\theta \le \frac{\pi}{R}.$$

Noen potensrekker:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^\infty z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$$

$$e^z = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots$$

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots$$

Noen trigonometriske identiteter:

$\sin(u \pm v) = \sin(u)\cos(v) \pm \cos(u)\sin(v), \qquad \cos(u \pm v) = \cos(u)\cos(v) \mp \sin(u)\sin(v),$

$$\sin(2u) = 2\sin(u)\cos(u), \qquad \cos(2u) = \cos^2(u) - \sin^2(u) = 2\cos^2(u) - 1 = 1 - 2\sin^2(u),$$
$$2\sin(u)\cos(v) = \sin(u-v) + \sin(u+v), \qquad 2\cos(u)\cos(v) = \cos(u-v) + \cos(u+v),$$
$$2\sin(u)\sin(v) = \cos(u-v) - \cos(u+v).$$

Fourierrekker for en periodisk funksjon med periode $2L$:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)$$
$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{-in\pi x/L}\,dx$$
$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx, \qquad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx,$$
$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx.$$

Cosinus- og sinusrekker for en funksjon definert på $[0, L]$:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \qquad a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx,$$
$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx.$$
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \qquad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx.$$

Noen integraler:

$$\int x^n e^x\,dx = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x\,dx$$
$$\int x^n \ln(x)\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(x) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C$$
$$\int x^n(\ln(x))^m\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln(x))^m - \frac{m}{n+1}\int x^n(\ln(x))^{m-1}\,dx$$
$$\int e^{ax}\cos(bx)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos(bx) + b\sin(bx)) + C$$
$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin(bx) - b\cos(bx)) + C$$
$$\int x^m\cos(bx)\,dx = \frac{x^m\sin(bx)}{b} - \frac{m}{b}\int x^{m-1}\sin(bx)\,dx$$
$$\int x^m\sin(bx)\,dx = -\frac{x^m\cos(bx)}{b} + \frac{m}{b}\int x^{m-1}\cos(bx)\,dx$$