NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i

MA2106 Kompleks funksjonsteori og differensialligninger Løsningsforslag

Faglig kontakt under eksamen: Kristian Seip

Tlf: 91129136

Eksamensdato: 8. august 2024

Eksamenstid (fra–til): 09:00-13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Annen informasjon:
Denne prøven består av 10 delpunkt som alle teller like mye. Svarene på oppgavene skal være godt begrunnet.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 4

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1 Trekantulikheten gir at

$$|z-4| = |-4+3i+z-3i| \geq |-4+3i| - |z-3i| = 5 - |x-3i|$$

for alle z i det komplekse plan.

Oppgave 2 Vi finner at

$$e^{iz^2} = e^{i(x^2-y^2+2xyi)} = e^{-2xy}(\cos(x^2-y^2) + i\sin(x^2-y^2)),$$

så $u(x,y) = e^{-2xy}\cos(x^2-y^2)$ og $v(x,y) = e^{-2xy}\sin(x^2-y^2))$.

Oppgave 3 Vi lar f være en analytisk funksjon på $\mathbb{C} \setminus \{z|\ z = x, x \geq 0\}$ slik at $f(-x) = \sqrt{x}$ når $1 < x < 2$. Vi vet fra identitetsteoremet at f er fullstendig bestemt av verdiene den tar på en delmengde av $\mathbb{C} \setminus \{z|\ z = x, x \geq 0\}$ med et opphopningspunkt i $\mathbb{C} \setminus \{z|\ z = x, x \geq 0\}$. Linjestykket $(-2,-1)$ har denne egenskapen, så f er fullstendig bestemt av verdiene $f(-x)$, $1 < x < 2$. Vi kan derfor slå fast at $f(z) = \sqrt{-z}$, der $\sqrt{-z}$ er den grenen av kvadratroten til $-z$ som har positiv realdel. Spesielt får vi derfor at $f(-4i) = 2e^{i\pi/4} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

Oppgave 4

a) Vi skal beregne det bestemte integralet

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2-\cos\theta}.$$

Om vi setter $z = e^{i\theta}$, får vi $\cos\theta = (z+1/z)/2$, og setter vi $dz = ie^{i\theta}d\theta$, får vi dermed

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2-\cos\theta} = \frac{1}{i}\int_C \frac{2dz}{4z-z^2-1},$$

der C er den positivt orienterte enhetssirkelen. Her kan nevneren på høyresiden kan skrives som $(z-(2-\sqrt{3})(+\sqrt{3}-z)$. Ved Cauchys formel (eller eventuelt residyteoremet) får vi dermed

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2-\cos\theta} = \frac{4\pi}{2+\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

b) Vi skal beregne

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1(0)} \frac{z^{n-1}}{2024z^n+2023}dz,$$

der n er et positivt heltall og $C_1(0)$ er den positivt orienterte enhetssirkelen. Om vi setter $f(z) := 2024z^n + 2023$, ser vi at

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1(0)} \frac{z^{n-1}}{2024z^n + 2023}dz = \frac{1}{2\pi i \cdot 2024n}\int_{C_1(0)} \frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$

Siden $f(z) \neq 0$ når $|z| = 1$, er integralet $1/(2024n)$ ganget med antall nullpunkter f har i enhetsdisken. Ulikheten $2023 < 2024$ gir at det er n. Altså får vi

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1(0)} \frac{z^{n-1}}{2024z^n + 2023}dz = \frac{n}{2024n} = \frac{1}{2024}.$$

c) Vi skal beregne det uegentlige integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1}dx.$$

La C_R være den positivt orienterte konturen som består av linjetykket $[-R, R]$ og halvsirkelen $z = Re^{i\theta}$ med $0 \leq \theta \leq \pi$. Vi setter $f(z) = z^2/(z^4+1)$ og ser at f har to enkle poler $e^{i\pi/4}$ og $e^{i3\pi/4}$ i området omsluttet av C_R når $R > 1$. Vi finner at

$$\mathrm{res}_{e^{i\pi/4}}(f) = \frac{e^{i2\pi/4}}{4e^{3i\pi/4}} \quad \text{og} \quad \mathrm{res}_{e^{i\pi/4}}(f) = \frac{e^{6i\pi/4}}{4e^{9i\pi/4}}$$

og dermed

$$\int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{4} \cdot (e^{-i\pi/4} + e^{-3i\pi/4}) = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}.$$

Ved et ML-estimat finner vi at integralet langs halvsirkelen er begrenset av

$$\frac{\pi R^3}{R^4 - 1}$$

som går mot 0 når $R \to \infty$. Dermed får vi at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1}dx = \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}.$$

Oppgave 5

a) Vi betrakter Fourier-sinus-rekken

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}.$$

Vi setter $g(x) \equiv 1$ for $0 < x < \pi$ og finner at

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\sin(kx)dx = \frac{2}{k\pi}[-\cos kx]_0^{\pi} = \begin{cases} 0, & k = 2n; \\ \frac{4}{\pi(2n+1)}, & k = 2n+1. \end{cases}$$

Den gitte rekken er derfor Fourier-sinus-rekken til g. Ved teoremet for punktvis konvergens av Fourier-rekker konvergerer rekken mot 1 for $0 < x < \pi$, og den konvergerer trivielt mot 0 når $x = k\pi$ for k et heltall. Siden rekken er en odde funksjon, konvergerer den mot -1 på $(-\pi, 0)$. Ved periodisitet konvergerer rekken dermed for all x. Spesielt har vi at rekken har sum -1 på intervallet $(\pi, 2\pi)$.

b) Vi skal finne alle funksjoner på formen $u(x,t) = X(x)T(t)$ slik at

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \quad 0 < x < \pi, t > 0; \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t > 0. \tag{2}$$

Vi finner at

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = K$$

for en konstant K. Betingelsen (2) medfører at vi må ha $X(0) = X(\pi) = 0$. Vi kan dermed utelukke at $K \geq 0$ siden det kun vil gi oss den trivielle løsningen $X \equiv 0$. Vi får dermed at $X(x) = A\cos\sqrt{K}x + B\sin\sqrt{K}x$. Kravet om at $X(0) = 0$ gir $A = 0$, og kravet om at $X(\pi) = 0$ gir i sin tur $\sqrt{K} = k$ for et heltall k. Altså får vi $u(x,t) = B(k)e^{-k^2 t}\sin kx$. Om vi nå krever at $u(x,0) = 1$ for $0 < x < \pi$, kan løsningen skrives som

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2n+1)^2 t}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}.$$

Oppgave 6 Vi lar f være en analytisk funksjon på $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Vi antar at det finnes et positivt tall M slik at $|f(z)| \leq M$ når $0 < |z| \leq 1$ og en følge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ slik at

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \text{og} \quad \lim_{n\to\infty} f(a_n) = 0.$$

a) De gitte opplysningene impliserer at 0 er en hevbar singularitet. Det betyr at hvis vi erklærer at $g(0) = 0$ og $g(z) = f(z)$ når $z \neq 0$, vil g være en hel funksjon. Spesielt vil g være deriverbar i 0. Dermed har vi

$$g'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z}$$

som må være lik et komplekst tall w_0.

b) Vi setter $G(z) := g(z)/z$ og ser at også G er en hel funksjon. Siden $|G(z)| \leq M$ for $|z| = 1$, gir maksimum-modulus-prinsippet at $|G(z)| \leq 1$ også for $|z| < 1$. Spesielt har vi da $|w_0| = |G(0)| \leq M$.