



Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i
MA2106 Kompleks funksjonsteori og differensialligninger
Løsningsforslag

Faglig kontakt under eksamen: Kristian Seip

Tlf: 91129136

Eksamensdato: 8. august 2024

Eksamenstid (fra-til): 09:00-13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Annen informasjon:

Denne prøven består av 10 delpunkt som alle teller like mye. Svarene på oppgavene skal være godt begrunnet.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 2

Kontrollert av:

Dato

Sign

Merk! Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet ditt. Eksamenkontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.

Oppgave 1 Trekantulikheten gir at

$$|z - 4| = |-4 + 3i + z - 3i| \geq |-4 + 3i| - |z - 3i| = 5 - |z - 3i|$$

for alle z i det komplekse plan.

Oppgave 2 Vi finner at

$$e^{iz^2} = e^{i(x^2 - y^2 + 2xyi)} = e^{-2xy}(\cos(x^2 - y^2) + i \sin(x^2 - y^2)),$$

så $u(x, y) = e^{-2xy} \cos(x^2 - y^2)$ og $v(x, y) = e^{-2xy} \sin(x^2 - y^2)$.

Oppgave 3 La f være en analytisk funksjon på $\mathbb{C} \setminus \{z \mid z = x, x \geq 0\}$ slik at $f(-x) = \sqrt{x}$ når $1 < x < 2$. Forklar først hvorfor f er fullstendig bestemt av disse opplysningene. Beregn deretter $f(-4i)$.

Oppgave 4

a) Beregn det bestemte integralet

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2 - \cos \theta}.$$

b) Beregn

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1(0)} \frac{z^{n-1}}{2024z^n + 2023} dz,$$

der n er et positivt heltall og $C_1(0)$ er den positivt orienterte enhets sirkelen.

c) Beregn det uegentlige integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} dx.$$

Oppgave 5

a) Begrunn at Fourier-sinus-rekken

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$$

konvergerer for alle x og at summen er lik en konstant C på intervallet $(0, \pi)$. Finn C , og avgjør deretter hva rekken konvergerer til på intervallet $(\pi, 2\pi)$.

b) Finn alle funksjoner på formen $u(x, t) = X(x)T(t)$ slik at

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad 0 < x < \pi, t > 0; \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t > 0. \quad (2)$$

Skriv ned en funksjon $u(x, t)$ på rekkeform som løser (1) og (2) slik at $u(x, 0) = C$ for $0 < x < \pi$, der C er konstanten fra punkt a).

Oppgave 6 La f være en analytisk funksjon på $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Anta det finnes et positivt tall M slik at $|f(z)| \leq M$ når $0 < |z| \leq 1$ og en følge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ slik at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad \text{og} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 0.$$

a) Forklar hvorfor det finnes et komplekst tall w_0 slik at

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z} = w_0.$$

b) Vis at $|w_0| \leq M$. (Hint: Husk maksimum-modulus-prinsippet.)

Noen nyttige formler

De Moivres formel: $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$.

Cauchy–Riemann-ligningene: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

Laplace-operatoren i to variable: $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Noen komplekse funksjoner:

$$e^z = \exp(z) = e^x(\cos(y) + i \sin(y)),$$

$$\log(z) = \ln(|z|) + i \arg(z), \quad \text{Ln}(z) = \text{Log}(z) = \ln(|z|) + i \text{Arg}(z),$$

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Cauchys generaliserte formel:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Jordans lemma:

$$\int_0^\pi e^{-R \sin \theta} d\theta \leq \frac{\pi}{R}.$$

Noen potensrekker:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$$

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

Noen trigonometriske identiteter:

$$\sin(u \pm v) = \sin(u) \cos(v) \pm \cos(u) \sin(v), \quad \cos(u \pm v) = \cos(u) \cos(v) \mp \sin(u) \sin(v),$$

$$\begin{aligned}\sin(2u) &= 2 \sin(u) \cos(u), & \cos(2u) &= \cos^2(u) - \sin^2(u) = 2 \cos^2(u) - 1 = 1 - 2 \sin^2(u), \\ 2 \sin(u) \cos(v) &= \sin(u-v) + \sin(u+v), & 2 \cos(u) \cos(v) &= \cos(u-v) + \cos(u+v), \\ & & 2 \sin(u) \sin(v) &= \cos(u-v) - \cos(u+v).\end{aligned}$$

Fourierrekker for en periodisk funksjon med periode $2L$:

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \\ c_n &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx \\ a_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx, & a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.\end{aligned}$$

Cosinus- og sinusrekker for en funksjon definert på $[0, L]$:

$$\begin{aligned}f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), & a_0 &= \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx, \\ & & a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \\ f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), & b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.\end{aligned}$$

Noen integraler:

$$\begin{aligned}\int x^n e^x dx &= x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx \\ \int x^n \ln(x) dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(x) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C \\ \int x^n (\ln(x))^m dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} (\ln(x))^m - \frac{m}{n+1} \int x^n (\ln(x))^{m-1} dx \\ \int e^{ax} \cos(bx) dx &= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos(bx) + b \sin(bx)) + C \\ \int e^{ax} \sin(bx) dx &= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin(bx) - b \cos(bx)) + C \\ \int x^m \cos(bx) dx &= \frac{x^m \sin(bx)}{b} - \frac{m}{b} \int x^{m-1} \sin(bx) dx \\ \int x^m \sin(bx) dx &= -\frac{x^m \cos(bx)}{b} + \frac{m}{b} \int x^{m-1} \cos(bx) dx\end{aligned}$$