# DIXONS BEVIS FOR CAUCHYS TEOREM

Vi har hittil bare vist Cauchys teorem for funksjoner som er analytiske på åpne konvekse mengder. Vi gjorde dette fordi veien fra Goursats teorem for trekanter til teoremet for konvekse mengder er spesielt kort og grei å forstå. Vi vil ofte klare oss med denne versjonen, men det er ønskelig å bli kvitt restriksjonen om konveksitet.

Vi skal nå se et kort og elegant bevis som unngår mye av det Sarason gjør i Kapittel IX. Kilden til dette er artikkelen "*A brief proof of Cauchy's integral theorem*" av John D. Dixon som ble publisert i Proc. Amer. Math. Soc. **29** (1971), 625–626.

Vi vil vise følgende versjon av Cauchys teorem.

**Cauchys teorem.** *La $\gamma$ være en enkel lukket kurve som er stykkevis $C^1$ og anta at $f$ er analytisk på en åpen mengde $G$ som inneholder $\gamma$ og området på innsiden av $\gamma$. Da har vi $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.*

Det vil i alle eksempler vi vil komme borti være klart hva vi mener med "området på innsiden av $\gamma$". Da kan $\gamma$ f. eks. være en sirkel, en halvsirkel pluss diameteren til halvsirkelen, et rektangel eller en lignende kurve. For en generell lukket kurve $\gamma$ kan vi appellere til et klassisk topologisk resultat kjent som Jordans kurveteorem, som sier at enhver enkel lukket kurve $\gamma$ har en veldefinert innside og utside. Vi vil ikke gjøre noe forsøk på å vise dette.

Vi kan imidlertid omgå hele problemet ved å bruke begrepet vindingstall (eller indeks) som defineres i avsnitt IX.4 i Sarason:

$$\operatorname{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dw}{w-z}$$

for et punkt $z$ som ligger utenfor $\gamma$, det vil si i mengden $\mathbb{C}\setminus\gamma$. Vindingstallet $\operatorname{ind}_\gamma(z)$ er som Sarason forklarer et heltall som—populært sagt—forteller hvor mange rotasjoner en observatør i punktet $z$ som visuelt følger en bevegelse langs $\gamma$ vil gjøre, når rotasjoner med klokka bokføres med negativt fortegn. Vindingstallet for positivt orienterte enkle kurver er 1, noe som er åpenbart i de fleste eksempler vi vil se. Vi definerer nå $\operatorname{ext}\gamma$ (området på utsiden av $\gamma$) som mengden av de $z$ der $\operatorname{ind}_\gamma(z) = 0$ og $\operatorname{int}\gamma$ (området på innsiden av $\gamma$) som mengden av de $z$ der $\operatorname{ind}_\gamma(z) \neq 0$. Med denne avklaringen kan vi faktisk svekke antagelsen i ovenstående teorem om at $\gamma$ er enkel.

Nå til Dixons bevis som først etablerer Cauchy-formelen

$$\operatorname{ind}_\gamma(z) f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw; \tag{1}$$

denne formelen gjelder når $z$ ligger i $G\setminus\gamma$. Vi ser at det er nok å vise dette, fordi vi da får

$$\int_\gamma f(w)\,dw = \int_\gamma \frac{f(w)(w-z)}{w-z}\,dw = 2\pi i \operatorname{ind}_\gamma(z) f(z)(z-z) = 0,$$

hvor $z$ er et vilkårlig punkt i $G\setminus\gamma$.

*Dixons bevis for Cauchy-formelen* (1). La antagelsene være som over. På $G$ definerer vi funksjonen

$$h(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,dw. \tag{2}$$

Vi ser umiddelbart at $h$ er analytisk på $G\setminus\gamma$, men vi kan si mer: $h$ er analytisk på *hele* $G$. For å vise at $h$ er analytisk i små omegner om punkter på $\gamma$ kan vi bruke Moreras teorem (se Sarason VII.10). Hvis $\gamma'$ er en vilkårlig trekant i en slik omegn, har vi

$$\int_{\gamma'} h(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\left(\int_{\gamma'}\frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,dz\right)dw = 0$$

ved Goursat teorem. Her byttet vi integrasjonsrekkefølgen som var berettiget siden integranden er en kontinuerlig funksjon av $z$ og $w$. Siden $h$ åpenbart er kontinuerlig, kan vi nå slutte ved Moreras teorem at $h$ er analytisk.

Merk at på $\operatorname{ext}\gamma\cap G$ (som er en åpen ikke-tom mengde) har vi ved definisjon av $\operatorname{ext}\gamma$

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw. \tag{3}$$

Men denne formelen definerer en analytisk funksjon i hele $\operatorname{ext}\gamma$, og vi kan dermed slutte—siden $\mathbb{C} = G\cup\operatorname{ext}\gamma$—at $h$ er en hel funksjon. Det er klart at mengden av de $z$ der $|z| > \max\{|w| : w\in\gamma\}$ er en delmengde av $\operatorname{ext}\gamma$. Vi ser fra (3) at $h$ er begrenset på denne mengden og i tillegg at $h(z)\to 0$ når $z\to\infty$. Ved Liouvilles teorem er derfor $h$ en konstant som nødvendigvis må være 0. Vi ser nå fra definisjonen (2) at vi dermed har etablert Cauchy-formelen (1). □