TILNÆRMING AV IDENTITETEN

Målet med dette notatet er å belyse betydningen av den teknikken[1] som beskrives i Lemma 8.24 i Krantz. La os først vise en litt mer generell versjon av dette viktige resultatet.

Teorem. *La ψ_t være en familie av kontinuerlige funksjoner på I, hvor I er et intervall som er symmetrisk om* 0 *og t tar verdier i en ubegrenset mengde av positive tall*[2]*. Anta at*

(i) $\psi_t(x) \geq 0$ *for all x;*
(ii) $\int_I \psi_t(x)\,dx = 1$ *for alle t;*
(iii) *For hver $\delta > 0$ har vi at*

$$\lim_{t\to\infty} \int_{I\setminus(-\delta,\delta)} \psi_t(x)\,dx = 0.$$

Hvis f er kontinuerlig og begrenset på $\mathbb{R}$, vil

$$f_t(x) := \int_I \psi_t(y) f(x-y)\,dy$$

konvergere uniformt mot $f(x)$ på ethvert endelig intervall når $t \to \infty$.

Før vi gir beviset for dette, kan det være oppklarende å se noen eksempler:

(1) Sett $I = [-1,1]$ og $k_j = \int_{-1}^{1}(1-t^2)^j\,dt$, og deretter $\psi_j(x) = k_j^{-1}(1-t^2)^j$. (Se s. 196 i Krantz.)
(2) Sett $I = [-\pi,\pi]$ og la $\psi_N = K_N$ hvor K_N er Fejér-kjernen:

$$K_N(x) := \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin\frac{(N+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2.$$

(3) Sett $I = [-\pi,\pi]$, og $\psi_{1/(1-r)} = (2\pi)^{-1}P_r(x)$, hvor P_r er Poisson-kjernen (se 11.4.2 i Krantz):

$$\psi_r(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{inx} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2}.$$

(4) Sett $I = \mathbb{R}$ og

$$\psi_t(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-tx^2}.$$

Disse eksemplene leder til fire ulike resultat (som vi skal se nærmere på på neste side). De demonstrerer dermed hvor anvendelig ovenstående teorem er!

Date: 6. november 2023.

[1]Den typen funksjoner som her brukes, kalles gjerne "approximate identities" på engelsk, så vi kan på norsk snakke om "tilnærming av identiteten"

[2]Indeksmengden kan typisk være $\mathbb{N}$ eller $[a,\infty)$ for en passende a

Bevis for teoremet. Vi bruker (ii) til å skrive

$$f(x) - f_t(x) = \int_I \psi_t(y)\big(f(x) - f(x-y)\big)\,dy.$$

Vi får dermed at

$$|f(x) - f_t(x)| \le \max_{|\xi|\le\delta}\big|f(x) - f(x-y)\big| + 2\max_{y\in I}|f(x+y)|\int_{I\setminus(-\delta,\delta)} \psi_t(y)\,dy.$$

(Her brukte vi både (i) og (ii) som viser at $\int_{-\delta,\delta}|\psi_t(y)|dy \le 1$.) Siden f er kontinuerlig, kan vi nå, gitt $\varepsilon > 0$, finne $\delta > 0$ slik at det første leddet på høyresiden blir mindre enn $\varepsilon/2$. Vi har antatt at $\max_{y\in I}|f(x+y)|$ er endelig (noe som for øvrig er automatisk om I er et endelig intervall). Vi kan derfor bruke (iii) til å finne en T slik at det andre leddet på høyresiden også er mindre enn $\varepsilon/2$ når $t > T$.

Siden kontinuerlige funksjoner på et endelig lukket intervall er uniformt kontinuerlige, blir konvergensen uniform på ethvert endelig intervall. □

Vi returnerer nå til eksemplene våre.

Weierstrass' approksimasjonsteorem. Dette teoremet sier at en kontinuerlig funksjon på et lukket intervall kan approksimeres vilkårlig godt (uniformt over intervallet) ved hjelp av et polynom. La oss nå vise dette. Vi kan anta at intervallet er $[0,1]$. Vi kan også anta at f er 0 utenfor $[0,1]$. Vi kan nemlig erstatte f med $f(x) - \big(f(0) + (f(1) - f(0))x\big)$, slik at funksjonen er 0 i endepunktene. Vi ser at når $0 \le x \le 1$, kan vi skrive

$$f_j(x) = \int_0^1 f(y)\psi_j(x-y)\,dy,$$

der ψ_j er funksjonene i Eksempel (1). Vi ser at $f_j(x)$ er polynomer på $[0,1]$, så vårt teorem impliserer det ønskede resultat.

Fejérs teorem. Dette er korollaret i notatet om Fejér-kjernen som sier at en 2π-periodisk kontinuerlig funksjonen kan approksimeres vilkårlig godt (uniformt over $[-\pi,\pi]$) ved hjelp av et trigonometrisk polynom. Forklaringen er tilsvarende som over, nemlig at funksjonene f_N i Eksempel (2) vil være trigonometriske polynomer.

Løsning av Dirichlet-problemet på enhetsdisken. Vi viser her til diskusjonen i 11.4.2 i Krantz. Den foreslåtte løsningen på side 269 kan skrives som

$$w(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\phi)f(\theta-\phi)\,d\phi.$$

Ovenstående teorem viser at $w(r,\theta) \to f(\theta)$ uniformt på $[-\pi,\pi]$. (Merk at vi ikke antar noe om konvergens av Fourier-rekken til f.)

Inversjonsformelen for Fourier-transformen. Vi kan nå vise følgende[3] (se Thm. 11.19 i Krantz).

[3]Det kan vises at både f of $\widehat{f}$ er kontinuerlige når f og $\widehat{f}$ er integrerbare, så antagelsen om kontinuitet av f er egentlig overflødig.

Teorem. *La f være en kontinuerlig, integrerbar funksjon på $\mathbb{R}$, og anta at også $\widehat{f}$ er integrerbar. Da har vi*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi.$$

Bevis. La ψ_t være som i Eksempel 4 og sett

$$f_t(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_t(y)f(x-y)\,dy.$$

Vi så i Øving 10 at

$$\widehat{f_t}(\xi) = \widehat{f}(\xi)e^{-\xi^2/(4t)}.$$

Siden $e^{-\xi^2/(4t)} \to 1$ når $t \to \infty$, er det klart at

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f_t}(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi \to \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi$$

når $t \to \infty$. Det er derfor nok å vise at

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f_t}(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi \to f(x)$$

når $t \to \infty$. Men dette følger fra det første teoremet vårt fordi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f_t}(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\xi y}\,dy\Big)e^{-\xi^2/(4t)}e^{ix\xi}\,d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi(x-y)}e^{-\xi^2/(4t)}\,d\xi\Big)\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\psi_t(x-y)\,dy,
\end{aligned}$$

der vi i den siste overgangen brukte at vi vet at inversjonsformelen holder for gaussiske funksjoner. Merk at vi tillot oss å bytte om på integrasjonsrekkefølgen, noe som kan forsvares fordi det itererte integralet er absolutt konvergent. □