APPROKSIMASJON AV KONTINUERLIGE FUNKSJONER MED TRIGONOMETRISKE POLYNOM

Dette notat er en kommentar til følgende bemerkning i Krantz (se s. 248): "*... in Exercise* ***5*** *of Section 9.3, we showed that functions of the form (11.2.1) are dense in the continuous functions ...*" Problemet med denne bemerkningen er at det ikke er klart hvordan man tenker seg at denne øvingsoppgaven skulle løses. Vi skal nå oppklare dette.

Vi ønsker altså å vise at hvis f er kontinuerlig på $[-\pi,\pi]$ (vi underforstår da at $f(-\pi) = f(\pi)$), så kan vi for en hver $\varepsilon > 0$ finne et positivt heltall N og koeffisienter $a_{-N}, a_{-N+1}, \dots, a_N$ slik at

$$\max_{-\pi\le x\le\pi} |f(x) - \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inx}| < \varepsilon.$$

Dette kan vises ved at vi tyr til den såkalte Fejér-kjernen K_N som innføres i Exercise 9 i Section 11.2[1]:

$$K_N(x) := \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin\frac{(N+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2.$$

Vi bruker nå notasjonen fra denne oppgaven og ser at $\sigma_N f(x)$ vil være et trigonometrisk polynom. På den annen side har vi åpenbart $K_n(x) \ge 0$ for alle x og

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_N(x)\,dx = 2\pi.$$

(Se igjen den samme øvingsoppgaven.) Det kan nå verifiseres (se Exercise 10 i Section 11.2) at følgen $\psi_N := \frac{1}{2\pi}K_N$ også tilfredsstiller (iii) i Lemma 8.24 i Krantz. Vi ser dermed at vi får det ønskede resultat ved å appellere til dette viktige lemmaet.

Merk at integralene av Dirichlet- og Fejér-kjernene over $[-\pi,\pi]$ begge er 2π, men kjernene er vesensforskjellige: Det er mye lettere å bruke Fejér-kjernen fordi den er ikke-negativ!

Date: 20. oktober 2022.

[1]Merk at det er en trykkfeil i Krantz: Det skal stå $\sin\frac{(x-t)}{2}$ i nevneren i uttrykket som kvadreres.