NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i

MA2106 Kompleks funksjonsteori og differensialligninger

Faglig kontakt under eksamen: Kristian Seip

Tlf: 91129136

Eksamensdato: 7. august 2023

Eksamenstid (fra–til): 09:00-13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Annen informasjon:
Denne prøven består av 10 delpunkt som alle teller like mye. Svarene på oppgavene skal være godt begrunnet.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 2

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1 Bruk en av Cauchy–Riemann-ligningene til å vise at $f(z) = \overline{z}$ ikke er analytisk i noe punkt z i $\mathbb{C}$.

Oppgave 2

a) Finn alle verdiene til $\log(1 + i)$.

b) Anta vi ønsker å definere $\log(z+1)$ som en analytisk funksjon i et størst mulig område som inneholder mengden $\{z = x+iy |\ y \neq 0\}$. Hvilke to områder kan vi da velge mellom? Forklar deretter, uten å regne, at $\log((x + 1)^2 + y^2)$ er en harmonisk funksjon når $x + iy \neq -1$.

Oppgave 3

a) Beregn det uegentlige integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx.$$

b) Beregn det komplekse linjeintegralet

$$\int_{C_1(0)} z^n e^{1/z} dz,$$

der n er et ikkenegativt heltall og $C_1(0)$ er den positivt orienterte enhetssirkelen. (Hint: Hva er Laurent-rekken til $z^n e^{1/z}$ om $z = 0$?)

Oppgave 4 La f være en 2π-periodisk funksjon slik at $f(x) = |x|$ for $-\pi < x \leq \pi$.

a) Forklar hvorfor $\widehat{f}(n)$ er reell og $\widehat{f}(n) = \widehat{f}(-n)$ for alle heltall n. Finn deretter $\widehat{f}(n)$ for $n \geq 0$.

b) Bruk resultatet i punkt a) og det du vet om konvergens av Fourier-rekker til å vise at

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n + 1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

c) Finn alle funksjoner på formen $u(x,t) = X(x)T(t)$ slik at

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \quad 0 < x < \pi, t > 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0, \quad t > 0. \tag{2}$$

Skriv ned en funksjon $u(x,t)$ på rekkeform som løser (1) og (2) slik at $u(x,0) = f(x)$ for $0 < x < \pi$, der f er funksjonen fra punkt a).

Oppgave 5

a) La f være en hel funksjon som tilfredsstiller estimatet

$$|f(z)| \leq (1 + |z|)^m$$

for all z, der m er et naturlig tall. Vis at f er et polynom av grad høyst m. (Hint: Bruk Cauchys generaliserte formel.)

b) La u være en (reell) harmonisk funksjon på $\mathbb{C}$ som tilfredsstiller estimatet

$$u(z) \leq \ln(|z| + 1)$$

for alle z. Vis at u må være konstant, det vil si at det finnes en konstant C slik at $u(z) = C$ for alle z. (Hint: Du kan bruke resultatet fra punkt a).)

Noen nyttige formler

De Moivres formel: $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

Cauchy–Riemann-ligningene: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

Laplace-operatoren i to variable: $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Noen komplekse funksjoner:

$$e^z = \exp(z) = e^x(\cos(y) + i\sin(y)),$$

$$\log(z) = \ln(|z|) + i\,\arg(z), \quad \mathrm{Ln}(z) = \mathrm{Log}(z) = \ln(|z|) + i\,\mathrm{Arg}(z),$$

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Cauchys generaliserte formel:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta.$$

Jordans lemma:

$$\int_0^\pi e^{-R\sin\theta} d\theta \le \frac{\pi}{R}.$$

Noen potensrekker:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots$$

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots$$

Noen trigonometriske identiteter:

$\sin(u \pm v) = \sin(u)\cos(v) \pm \cos(u)\sin(v)$, $\qquad \cos(u \pm v) = \cos(u)\cos(v) \mp \sin(u)\sin(v)$,

$$\sin(2u) = 2\sin(u)\cos(u), \qquad \cos(2u) = \cos^2(u) - \sin^2(u) = 2\cos^2(u) - 1 = 1 - 2\sin^2(u),$$
$$2\sin(u)\cos(v) = \sin(u-v) + \sin(u+v), \qquad 2\cos(u)\cos(v) = \cos(u-v) + \cos(u+v),$$
$$2\sin(u)\sin(v) = \cos(u-v) - \cos(u+v).$$

Fourierrekker for en periodisk funksjon med periode $2L$:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right)$$
$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) e^{-in\pi x/L}\, dx$$
$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx, \qquad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, dx,$$
$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, dx.$$

Cosinus- og sinusrekker for en funksjon definert på $[0, L]$:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \qquad a_0 = \frac{1}{L} \int_{0}^{L} f(x)\, dx,$$
$$a_n = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, dx.$$
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \qquad b_n = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, dx.$$

Noen integraler:

$$\int x^n e^x\, dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x\, dx$$
$$\int x^n \ln(x)\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(x) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C$$
$$\int x^n (\ln(x))^m\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} (\ln(x))^m - \frac{m}{n+1} \int x^n (\ln(x))^{m-1}\, dx$$
$$\int e^{ax} \cos(bx)\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a\cos(bx) + b\sin(bx)) + C$$
$$\int e^{ax} \sin(bx)\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a\sin(bx) - b\cos(bx)) + C$$
$$\int x^m \cos(bx)\, dx = \frac{x^m \sin(bx)}{b} - \frac{m}{b} \int x^{m-1} \sin(bx)\, dx$$
$$\int x^m \sin(bx)\, dx = -\frac{x^m \cos(bx)}{b} + \frac{m}{b} \int x^{m-1} \cos(bx)\, dx$$