NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i
MA2106 Kompleks funksjonsteori og differensialligninger

Faglig kontakt under eksamen: Kristian Seip

Tlf: 91129136

Eksamensdato: 6. desember 2022

Eksamenstid (fra–til): 15:00-19:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Annen informasjon:
Denne prøven består av 10 delpunkt som alle teller like mye. Svarene på oppgavene skal være godt begrunnet.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 4

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1

a) Vi skal vise at $u(z) = x^3 - 3xy^2 + e^{-x}\cos y$ er harmonisk for alle $z = x + iy$ i det komplekse plan. Vi partiellderiverer og finner:

$$u_x = 3x^2 - 3y^2 - e^{-x}\cos y; \quad u_{xx} = 6x + e^{-x}\cos y;$$
$$u_y = -6xy - e^{-x}\sin y; \quad u_{yy} = -6x - e^{-x}\cos y.$$

Vi har dermed at $u_{xx} + u_{yy} = 0$ for alle z, og u er derfor harmonisk.

b) For å finne f kan vi enten "gjette" eller bruke Cauchy–Riemann-ligningene. Begge løsninger er fullgode. (Om vi gjetter, kan vi også i samme slengen løse punkt (a).) Vi viser her hvordan vi bruker Cauchy–Riemann-ligningene. Fra $u_x = v_y$ får vi ved å bruke ovenstående uttrykk for u_x at

$$v = 3x^2y - y^3 - e^{-x}\sin y + C(x),$$

hvor $C(x)$ er en ukjent funksjon av x. Vi partiellederiverer m.h.p. x og setter inn i ligningen $u_y = -v_x$. Om vi bruker ovenstående uttrykk for u_y, får vi

$$-6xy - e^{-x}\sin y = -(6xy + e^{-x}\sin y) + C'(x),$$

som betyr at C er en konstant. Kravet om at $f(0) = 1$ gir til slutt $C = 0$. Vi har dermed

$$v = 3x^2y - y^3 - e^{-x}\sin y$$

og finner derfor at

$$f(z) = u + iv = z^3 + e^{-z}.$$

Oppgave 2

a) Vi setter $z = e^{i\theta}$ slik at vi kan skrive

$$\frac{1}{2+\cos\theta} = \frac{2}{4 + z + 1/z} = \frac{2z}{z^2 + 4z + 1}.$$

Vi parameteriserer enhetssirkelen på vanlig måte, det vil si vi setter $z(\theta) = e^{i\theta}$ som gir $dz = iz d\theta$. Vårt integral kan dermed skrives

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1(0)} \frac{4\pi z}{z^2 + 4z + 1} dz.$$

Vi skriver $z^2 + 4z + 1 = (z - (-2 + \sqrt{3}))(z - (-2 - \sqrt{3}))$. Siden $2 - \sqrt{3} < 1$ og $2 + \sqrt{3} > 1$, gir dermed Cauchys integralformel

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

b) Funksjonen

$$f(z) := \frac{\sin(\pi/z)}{1 - z}$$

har isolerte singulariteter i $z = 0$ og $z = 1$. Siden $\sin\pi = 0$, har vi

$$\lim_{z\to 1} \frac{\sin(\pi/z)}{1 - z} = -\frac{d}{dz}\sin(\pi/z)|_{z=1} = \pi.$$

$z = 1$ er dermed en hevbar singularitet. Vi vet at $\sin\pi/z$ har en essensiell singularitet i $z = 0$, noe som ikke endres om vi ganger denne funksjonen med en funksjon som er analytisk i 0. Vi konkluderer at $z = 0$ er en essensiell singularitet.

For å beregne integralet, er det nok å finne residyen til f i 0.Vi får Laurent-rekken til f om 0 fra produktet

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(\pi/z)^{2n-1}}{(2n-1)!} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} z^m.$$

Residyen til f i 0 er koeffisienten foran $1/z$ når vi ganger sammen disse to rekkene ledd for ledd og samler alle ledd med samme potens av z. Det gir

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\pi^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sin\pi = 0.$$

Vi får dermed at

$$\int_{C_2(0)} f(z)dz = 0.$$

(Istedenfor å gange sammen de to rekkene kan vi alternativt skrive

$$\int_{C_2(0)} f(z)dz = \int_{C_{1/2}(0)} f(z)dz = \sum_{m=0}^{\infty} \int_{C_{1/2}(0)} z^m \sin(\pi/z)dz$$

og regne ut hvert av integralene i sistnevnte sum.)

Oppgave 3 Vi vet at $f := u + i(v + 1)$ er en hel funksjon. Dermed er også $e^{f^2} = e^{u^2-(v+1)^2+i2u(v+1)}$ en hel funksjon. Det betyr at

$$\operatorname{Re} e^{f^2} = e^{u^2-(v+1)^2} \cos(2u(v + 1)$$

er harmonisk på $\mathbb{C}$.

Oppgave 4 f er en 2π-periodisk funksjon slik at $f(x) = \cosh x$ for $-\pi < x \le \pi$.

a) Siden f er en jevn funksjon og $\sin nx$ er en odde funksjon, får vi

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$$

som både viser at $\widehat{f}(n)$ er reell og at $\widehat{f}(-n) = \widehat{f}(n)$. Det er imidlertid enklest om vi regner komplekst når vi skal finne $\widehat{f}(n)$ for $n \ge 0$:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(n) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(e^x + e^{-x})e^{-inx}dx &= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{e^{x-inx}}{1-in} + \frac{e^{-x-inx}}{-1-in}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= (-1)^n\frac{\sinh\pi}{\pi(1+n^2)}.\end{aligned}$$

b) Funksjonen f tilfredsstiller Lipschitz-betingelsen

$$|f(\pi) - f(x)| \le \sinh\pi|x-\pi|,$$

så Fourier-rekken til f konvergerer mot f i $x = \pi$. (Den konvergerer mot f i alle punkter, men vi trenger bare rekken i $x = \pi$.) Vi får dermed

$$\cosh\pi = \frac{\sinh\pi}{\pi} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh\pi}{1+n^2} = -\frac{\sinh\pi}{\pi} + 2\sinh\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+n^2},$$

som gir at

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi}{2\tanh\pi} + \frac{1}{2}.$$

c) Funksjonen $u_n(z) := r^n\cos(n\theta)$, $z = re^{i\theta}$, er harmonisk siden $r^n\cos(n\theta) = \operatorname{Re} z^n$ og z^n er analytisk. Dermed gir $u_n(z) := r^n\cos(n\theta)$ en kontinuerlig løsning av Dirichlet-problemet

$$\begin{aligned}\Delta u_n = 0, &\quad 0 \le r < 1, -\pi < \theta \le \pi; \\ u(e^{i\theta}) = \cos(n\theta), &\quad -\pi < \theta \le \pi.\end{aligned}$$

Vi får dermed at

$$u(re^{i\theta}) = \frac{\sinh\pi}{\pi} + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n r^n\frac{\sinh\pi}{1+n^2}\cos n\theta$$

er en løsning av Dirichlet-problemet

$$\Delta u = 0, \quad 0 \le r < 1, -\pi < \theta \le \pi;$$
$$u(e^{i\theta}) = f(\theta), \quad -\pi < \theta \le \pi.$$

Her er kontinuitet på den lukkede enhetsdisken sikret ved Weierstrass' M-test:

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{\sinh \pi}{1+n^2} |\cos n\theta| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} < \infty,$$

og funksjonen u er harmonisk i enhetsdisken fordi den er realdelen til en analytisk funksjon.

Oppgave 5 Vi velger et stort positivt tall R og ser på endringen i argumentet til polynomet $z^9 + az^8 + bz^7 + c$ når vi beveger oss fra 0 til $z = R$, deretter langs en kvartsirkel fra R til iR og til slutt tilbake til 0. Fra 0 til R er det ingen endring i argumentet. Skriver vi

$$z^9 + az^8 + bz^7 + c = z^9(1 + az^{-1} + bz^{-2} + cz^{-9}),$$

ser vi at vi kan få endringen i argumentet til å bli så nær $9\pi/2$ vi måtte ønske. Langs den imaginære aksen har vi

$$(iy)^9 + a(iy)^8 + b(iy)^7 + c = i(y^9 - ay^7) + ay^8 + c.$$

Vi holder oss i høyre halvplan siden $ay^8 + c > 0$. Derfor blir endringen i argumentet så nær $-\pi/2$ vi måtte ønske. Totalt sett blir dermed endringen i argumentet

$$0 + 9\pi/2 - \pi/2 = 4\pi.$$

I følge argumentprinsippet har derfor polynomet nøyaktig to nullpunkt i første kvadrant.

Oppgave 6 Ved Cauchys integralformel har vi

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R(0)} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw$$

når $R > |z|$. Ved den gitte egenskapen til f får vi derfor

$$|f'(z)| \le \frac{1}{\pi\sqrt{R}} \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\theta}(1-|z|/R)^2} d\theta = \frac{2}{\sqrt{\pi R}} \frac{1}{(1-|z|/R)^2}.$$

Siden uttrykket til høyre går mot 0 når $R \to \infty$, betyr det at $f'(z) = 0$ for alle z, noe som medfører at f er konstant.