Øving 7

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

6.1.9 Vis at hvis n er et kvadratfritt positivt heltall så er $\tau(n) = 2^r$, hvor r er antall primtalsfaktorer til n.

6.1.20 La $\omega(n)$ være definert som antall distinkte primtallsfaktorer til $n > 1$, der $\omega(1) = 0$. Da har vi for eksempel $\omega(360) = \omega(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5) = 3$.

(a) Vis at $2^{\omega(n)}$ er en multiplikativ funksjon.

(b) For et positivt heltall n, vis at

$$\tau(n^2) = \sum_{d|n} 2^{\omega(d)}.$$

Hint: Teorem 6.4 reduserer problemet til å vise at dette stemmer for $n = p^k$, der p er et primtall.

6.2.1 (a) For alle positive heltall n, vis at

$$\mu(n)\mu(n+1)\mu(n+2)\mu(n+3) = 0.$$

(b) For alle heltall $n \geq 3$, vis at $\sum_{k=1}^{n} \mu(k!) = 1$.

6.2.2 La *Mangoldt funksjonen* Λ være definert som

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{hvis } n = p^k \text{ for et primtall } p \text{ og } k \geq 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Vis at $\Lambda(n) = \sum_{d|n} \mu(n/d) \log d = -\sum_{d|n} \mu(d) \log d$.

Hint: Vis først at $\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log n$ and then apply the Möbius inversion formula.

6.2.7 Liouville λ-funksjonen er definert ved $\lambda(1) = 1$ og $\lambda(n) = (-1)^{k_1+k_2+\cdots+k_r}$, der $k_1, \ldots, k_r$ er potensene i primtallsfaktoriseringen $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}$. For eksempel så er

$$\lambda(360) = \lambda(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5) = (-1)^{3+2+1} = (-1)^6 = 1.$$

(a) Vis at λ er multiplikativ.
Hint: For å gjøre (b) enklere burde du vise at λ er fullstendig multiplikativ.

(b) Gitt et positivt heltall n, vis at

$$\sum_{d|n} \lambda(d) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } n = m^2 \text{ for et heltall } m \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Eksamen H2022 - oppg. 5 For $n \geq 1$ er $\sigma(n)$ definert som summen av alle positive divisorer til n. Vis at

$$\sum_{d|n} \frac{1}{d} = \frac{\sigma(n)}{n},$$

og deretter at

$$\frac{\sigma(n!)}{n!} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Ekstra: Eksamen K2021 - oppg. 6 **a)**

La f være en multiplikativ funksjon, og la μ betegne Möbius-funksjonen. Vis at

$$\sum_{d|n} \mu(d) f(d) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ \prod_{p|n}(1 - f(p)), & n > 1 \end{cases}$$

(Produktet til høyre er over alle primtall p som deler n.)

b)

For $n \geq$ er $\tau(n)$ definert som antall positive divisorer til n. Beregn

$$\sum_{d|2020} \mu(d)\tau(d).$$