Løsningsforslag — Øving 5

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

$\boxed{\text{4.4.1b)}}$ Vi observerer først at $\gcd(5, 26) = 1$, og siden $1 \mid 2$ har kongruensligningen en unik løsning modulo 26. La oss nå finne løsningen. Vi ser at

$$25 \equiv -1 \pmod{26},$$

så hvis vi ganger kongruensligningen med 5 på begge sider får vi

$$\begin{aligned} 5 \cdot 5x \equiv 25x \equiv -x &\equiv 10 \pmod{26} \\ x &\equiv -10 \equiv 16 \pmod{26} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{4.4.1c)}}$ Vi observerer først at $\gcd(6, 21) = 3$, og siden $3 \mid 15$ har kongruensligningen tre løsninger modulo 21. La oss nå finne løsningene. Vi ser at

$$6x + 21y = 15$$

holder når vi velger $x_0 = -1$ og $y_0 = 1$. De andre løsningene finner vi med

$$x \equiv -1 + (21/3)t \equiv -1 + 7t \pmod{21} \qquad t = 0, 1, 2$$

$\boxed{\text{4.4.10}}$ Vi begynner med å oversette oppgaven til et system av lineære kongruenser. Vi skal finne det minste heltallet $x > 0$ som tilfredsstiller systemet

$$\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod{17} \\ x &\equiv 10 \pmod{16} \\ x &\equiv 0 \pmod{15} \end{aligned}$$

Siden tallene 17, 16, 15 er parvis relativt primiske kan vi bruke det kinesiske restteoremet til å si at systemet har en unik løsning modulo $17 \cdot 16 \cdot 15 = 4080$. Vi setter $N_1 = 16 \cdot 15 = 240$, $N_2 = 17 \cdot 15 = 255$ og $N_3 = 17 \cdot 16 = 272$ og begynner med å løse de følgende lineære kongruensene

$$\begin{aligned} 240x_1 &\equiv 1 \pmod{17} \\ 255x_2 &\equiv 1 \pmod{16} \\ 272x_3 &\equiv 1 \pmod{15} \end{aligned}$$

Euklids algoritme på 240 og 17 gir $1 = 240 \cdot (-8) + 17 \cdot 113$, så $x_1 = -8$ er en løsning til den første kongruensen. For den andre kan man bruke Euklids algoritme på 255 og 16 for å finne $1 = 255 \cdot (-1) + 16 \cdot 16$, så $x_2 = -1$ passer inn. Den tredje kongruensen trenger vi ikke å løse siden den opprinnelige kongruensen inneholder tallet 0. Har da:

$$x_0 = 240 \cdot (-8) \cdot 3 + 255 \cdot (-1) \cdot 10 + 272 \cdot x_3 \cdot 0 = -8310$$

Så løsningen av systemet blir

$$x = -8310 \equiv 3930 \pmod{4080}.$$

Eksamen H2019 oppg. 5 Denne oppgaven kan også løses på samme måte som den forrige oppgaven, men for treningens skyld bruker vi den alternative metoden for å løse system av lineære kongruenser. Vi har systemet

$$\begin{aligned} 3x &\equiv -1 \pmod 7 \\ x &\equiv 0 \pmod 5 \\ 5x &\equiv 1 \pmod 9 \end{aligned}$$

Ved å bruke at $3 \cdot 2 \equiv -1 \pmod 7$ og $5 \cdot 2 \equiv 1 \pmod 9$ skriver vi om systemet til standardform

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod 7 \\ x &\equiv 0 \pmod 5 \\ x &\equiv 2 \pmod 9 \end{aligned}$$

Fra den andre kongruensen ser vi at $x = 5t$ for $t \in \mathbb{Z}$. Dermed kan vi sette dette inn i den siste kongruensen, og få ved at bruke $5 \cdot 4 \equiv 2 \pmod 9$ at

$$\begin{aligned} x \equiv 5t &\equiv 2 \pmod 9 \\ t &\equiv 4 \pmod 9 \end{aligned}$$

Altså må $t = 4 + 9s$ for $s \in \mathbb{Z}$. Dette gir at $x = 5t = 20 + 45s$. Vi setter inn dette i den første kongruensen i systemet, og får

$$\begin{aligned} x \equiv 20 + 45s &\equiv 2 \pmod 7 \\ 20 + 45s \equiv (-1) + 3s &\equiv 2 \pmod 7 \\ 3s &\equiv 3 \pmod 7 \\ s &\equiv 1 \pmod 7 \end{aligned}$$

Dette gir at $s = 1 + 7r$, for $r \in \mathbb{Z}$, som igjen betyr at $x = 20 + 45s = 20 + 45(1 + 7r) = 65 + 315r$. Så alle heltallsløsninger til det gitte systemet er på formen $65 + 315r$ for $r \in \mathbb{Z}$.

Eksamen H2022 oppg. 1 Om vi primtallsfaktoriserer $168 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7$ og $220 = 4 \cdot 5 \cdot 11$, ser vi at $\gcd(168, 220) = 4$. Vi kan dermed dele på 4 i den opprinnelige kongruensligningen, og få den ekvivalente kongruensen

$$42x \equiv 2 \pmod{55} \tag{1}$$

Siden $\gcd(42, 55) = 1$, har sistnevnte kongruens én entydig løsning modulo 55. Vi bruker Euklids algoritme:

$$\begin{aligned}
55 &= 42 + 13 \\
42 &= 3 \cdot 13 + 3 \\
13 &= 4 \cdot 3 + 1
\end{aligned}$$

Vi reverserer algoritmen og finner at

$$\begin{aligned}
1 &= 13 - 4 \cdot 3 \\
&= 13 - 4 \cdot (42 - 3 \cdot 13) = 13 \cdot 13 - 4 \cdot 42 \\
&= 13 \cdot (55 - 42) - 4 \cdot 42 = 13 \cdot 55 - 17 \cdot 42
\end{aligned}$$

Løsningen av (1) er dermed $x \equiv (-17) \cdot 2 = -34 \equiv 21 \pmod{55}$. Det følger at den opprinnelige kongruensen har 4 inkongruente løsninger modulo 220, gitt ved

$$x \equiv 21 + 55t \pmod{220} \qquad t = 0, 1, 2, 3.$$

Eksamen H2022 oppg. 2 Siden tallene 4, 7, 11 er parvis relativt primiske kan vi bruke det kinesiske restteoremet til å si at systemet har en unik løsning modulo $4 \cdot 7 \cdot 11 = 308$. Vi løser først de lineære kongruensene

$$\begin{aligned}
77x_1 &\equiv 1 \pmod 4 \\
44x_2 &\equiv 1 \pmod 7 \\
28x_3 &\equiv 1 \pmod{11}
\end{aligned}$$

som gir $x_1 = 1, x_2 = 4$ og $x_3 = 2$. Løsningen av det gitte systemet av lineære kongruenser blir dermed

$$x \equiv 77 \cdot 1 \cdot 1 + 44 \cdot 4 \cdot 2 + 28 \cdot 2 \cdot (-1) = 373 \equiv 65 \pmod{308}.$$

Det minste positive tallet som tilfredsstiller alle de gitte kongruensene er derfor 65.