MA1301 Tallteori
Høst 2023

Løsningsforslag — Øving 1

1.1.1a Vi ønsker å vise at

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},\text{ for alle } n\geq 1, \tag{1}$$

ved å bruke matematisk induksjon.

Steg I:
Vi viser at (1) holder for $n=1$. Vi ser at for $n=1$ er venstresiden til (1) lik 1, og høyresiden er også lik 1. Dermed holder (1) for $n=1$.

Steg II:
Vi viser at dersom (1) holder for $n=k$, så holder (1) også for $n=k+1$. Så vi antar at

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2} \tag{IH}$$

for en $k\geq 1$. Dette er vår induksjonshypotese, og derfor kaller vi den (IH). Vi ønsker å vise at (IH) impliserer at

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}. \tag{2}$$

Vi beviser dette ved å begynne med den venstre siden til (2), og skrive den om ved bruk av (IH):

$$\begin{aligned}1+2+3+\cdots+k+(k+1)&=(1+2+3+\cdots+k)+(k+1)\\&\overset{(IH)}{=}\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)+(k+1)\\&=\frac{k(k+1)}{2}+\frac{2(k+1)}{2}\\&=\frac{(k+2)(k+1)}{2}\\&=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.\end{aligned}$$

Altså holder (1) for $n=k+1$, og induksjonen er ferdig. Følgelig holder (1) for alle $n\geq 1$.

$\boxed{1.1.9}$ Vi ønsker å vise at dersom $1 + a > 0$, så er

$$(1 + a)^n \geq 1 + na, \text{ for alle } n \geq 1. \tag{3}$$

Vi bruker induksjon.

Steg I:
Vi ser at (3) holder for $n = 1$, siden $(1 + a)^1 = 1 + a \geq 1 + 1 \cdot a$.

Steg II:
Vi antar nå at (3) stemmer for $n = k$, og vi vil vise at det da også stemmer for $n = k + 1$. Vi antar altså at

$$(1 + a)^k \geq 1 + ka, \tag{IH}$$

og vi ønsker å bruke dette til å vise at

$$(1 + a)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)a.$$

Med litt omskriving ser vi at

$$\begin{aligned}
(1 + a)^{k+1} &= (1 + a)(1 + a)^k \\
&\geq (1 + a)(1 + ka) \\
&= 1 + (k + 1)a + ka^2 \\
&\geq 1 + (k + 1)a
\end{aligned}$$

Her kommer den første ulikheten fra (IH), og den andre kommer av at a^2 alltid er positivt. Med dette har vi vist at (3) holder for $n = k + 1$, og induksjonen er ferdig. Følgelig holder (3) for alle $n \geq 1$.

$\boxed{1.2.1a}$ Vi ønsker å vise at

$$\binom{n}{k}\binom{k}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}, \qquad n \geq k \geq r \geq 0.$$

Vi gjør dette ved å bruke definisjonen av binomialkoeffisienten og regne ut på venstre side av likhetstegnet

$$\begin{aligned}
\binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r} &= \frac{n!}{r!(n-r)!} \cdot \frac{(n-r)!}{(k-r)!((n-r)-(k-r))!} \\
&= \frac{n!}{r!(n-r)!} \cdot \frac{(n-r)!}{(k-r)!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{r!(k-r)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{k!}{r!(k-r)!} \\
&= \binom{n}{k}\binom{k}{r}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{1.2.1b}}$ Hvis vi bruker $r = 1$ i Newtons identitet har vi at

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{k}\binom{k}{1} &= \binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1}, \\
\binom{n}{k}k &= n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}, \\
k\binom{n}{k} &= (n-k+1)\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}, \\
\binom{n}{k} &= \frac{(n-k+1)}{k}\binom{n}{k-1},
\end{aligned}
$$

som er det vi ville vise.

$\boxed{\text{1.2.3d}}$ Vi ønsker å vise at

$$\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \cdots + 2^n\binom{n}{n} = 3^n. \tag{4}$$

For å gjøre det bruker vi binomialteoremet, som sier at

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{n-k}b^k, \text{ for alle } n \geq 1. \tag{5}$$

Ved å sette $a = 1$ og $b = 2$, ser vi at vi får

$$
\begin{aligned}
3^n = (1+2)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} 1^{n-k}2^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} 2^k \qquad (6)\\
&= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}2 + \binom{n}{2}2^2 + \cdots + \binom{n}{n}2^n, \qquad (7)
\end{aligned}
$$

som er det vi ville vise.

$\boxed{\text{2.2.2}}$ Hvis vi har et tall på formen $6k + 5$, så kan vi skrive det på formen

$$6k + 5 = 6k + 3 + 2 = 3(2k + 1) + 2.$$

Om vi setter $j = 2k + 1$ får vi at

$$6k + 5 = 3j + 2.$$

For å vise at det ikke stemmer andre veien kan vi se på tallet 8, som kan skrives som $3 \cdot 2 + 2$, men også $6 \cdot 1 + 2$. Da har vi fra divisjonsalgoritmen at 8 ikke kan skrives på formen $6k + 5$, som er det vi ville vise.

2.2.3a La $a \in \mathbb{Z}$. Divisjonsalgoritmen gir at $\exists\ q, r \in \mathbb{Z}$ med $a = 3q + r$, hvor $0 \leq r < 3$, dvs. $r \in \{0, 1, 2\}$. Det vil si at a er på én av følgende former:

$$3q,\ 3q+1,\ 3q+2$$

Dette gir:

$$\begin{aligned}
a = 3q &\implies a^2 = 9q^2 = 3(3q^2) \\
a = 3q+1 &\implies a^2 = 9q^2 + 6q + 1 = 3(3q^2 + 2q) + 1 \\
a = 3q+2 &\implies a^2 = 9q^2 + 12q + 4 = 3(3q^2 + 4q + 1) + 1
\end{aligned}$$

Så a^2 er på formen $3k$ eller $3k+1$.

Eksamen K2017 - oppg. 2 Vi skal vise ved induksjon at $\sum_{i=1}^{n} 2^i \cdot i = 2 + 2^{n+1}(n-1)$ for alle naturlige tall n.

I basissteget for induksjonen setter vi $n = 1$ og får:

$$\sum_{n=1}^{1} 2^i \cdot i = 2^1 \cdot 1 = 2 = 2 + 2^{1+1}(1-1).$$

Vi ser at påstanden holder for $n = 1$.

I induksjonssteget antar vi at påstanden holder for $n = k$, der k er et vilkårlig naturlig tall, og vil vise at da holder den også for $n = k+1$. Vi får følgende (i likheten merket med $*$ bruker vi induksjonshypotesen):

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} 2^i \cdot i = \sum_{i=1}^{k} 2^i \cdot i + 2^{k+1}(k+1) &\stackrel{*}{=} 2 + 2^{k+1}(k-1) + 2^{k+1}(k+1) \\
&= 2 + 2 \cdot 2^{k+1}k = 2 + 2^{(k+1)+1}((k+1)-1)
\end{aligned}$$

Dette betyr at påstanden også holder for $n = k+1$, og induksjonsbeviset er ferdig.

Eksamen K2019 - oppg. 4 For å vise at alle oddetall kan skrives som differansen mellom to kvadrattall kan vi bruke et meget nyttig triks, nemlig å "legge til null". Fordi hvis n er et oddetall så finnes det et naturlig tall k slik at $n = 2k+1$, og hvis vi da legger til og trekker fra k^2, så får vi

$$n = 2k + 1 = 2k + 1 + (k^2 - k^2) = (k^2 + 2k + 1) - k^2 = (k+1)^2 - k^2.$$

Siden både k og $k+1$ er heltall, så viser dette at alle oddetall kan skrives som differansen mellom to heltall.

Eksamen H2019 - oppg. 4 Kvadrattall er enten på formen $4k$ eller $4k+1$. For å se det, observer at ethvert heltall er enten et partall eller et oddetall. For et partall $n = 2q$ har vi at $n^2 = (2q)^2 = 4k$, som er delelig på 4. For et oddetall $n = 2k+1$ har vi at $n^2 = (2q+1)^2 = 4(q^2+q)+1 = 4k+1$, som har rest 1 når vi deler på 4. Dette betyr at et tall som *ikke* har rest lik 0 eller 1 når det deles på 4, ikke kan være et kvadrattall. Så det holder for oss å vise at $38,948,127,483$ ikke har rest lik 0 eller 1 når det deles på 4. Vi ser at tallet kan skrives som

$$389,481,274 * 100 + 80 + 3 = (389,481,274 * 25) * 4 + 20 * 4 + 3$$

Siden tallet kan skrives som $4m+3$ for en $m \in \mathbb{N}$, så har det rest lik 3 når vi deler på 4. Følgelig kan tallet ikke være et kvadrattall, og vi er ferdig.