EULERS BEVIS FOR AT DET FINS UENDELIG MANGE PRIMTALL

Eulers bevis (1737) starter fra følgende ulikhet:

$$\prod_{p\le x}\frac{1}{1-\frac{1}{p}} \ge \prod_{p\le x}\sum_{p^j\le x}\frac{1}{p^j}.$$

Produktet er altså over alle primtall p som er mindre enn eller lik et stort positivt tall x. Ved aritmetikkens fundamentalteorem får vi dermed at

$$\prod_{p\le x}\frac{1}{1-\frac{1}{p}} \ge \sum_{n\le x}\frac{1}{n}.$$

Vi får dermed at

$$\prod_{p\le x}\frac{1}{1-\frac{1}{p}} \ge \ln x.$$

Dette gir interessant og presis informasjon om primtallenes fordeling. For å gjøre dette tydeligere kan vi bruke analyse. Vi ser at når $0 \le t \le 1/2$, har vi

$$\frac{1}{1-t} \le e^{t+t^2}$$

fordi funksjon $f(t) = (1-t)e^{t+t^2}$ tilfredsstiller $f(0) = 1$ og

$$f'(t) = (t-2t^2)e^{t+t^2} \ge 0.$$

Siden $p \ge 2$, gir ulikheten vår at

$$\exp\left(\sum_{p\le x}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}\right)\right) \ge \ln x.$$

Siden rekken $\sum_p 1/p^2$ konvergerer, får vi derfor at det fins en positiv konstant C slik at

$$\sum_{p\le x}\frac{1}{p} \ge \ln\ln x - C.$$

Merk at dette er en forløper til Mertens' teorem (1874) som gir det mer presise resultatet at

$$\sum_{p\le x}\frac{1}{p} = \ln\ln x + M + R(x),$$

hvor M er en positiv konstant (kjent som Mertens- eller Meisser–Mertens-konstanten) og $R(x)$ er begrenset av en konstant ganget med $1/\ln x$. Restleddet $R(x)$ går altså mot 0 når $x \to \infty$. (Det er senere blitt vist at $R(x)$ går raskere mot null enn det Mertens var i stand til å vise.)

Date: 8. september 2021.