NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA1301/MA6301 Tallteori**

Faglig kontakt under eksamen: Ole Martin Edstrøm

Tlf: 477 12 286

Eksamensdato: 12. august 2022

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Annen informasjon:
Denne prøven består av 10 delpunkt som alle teller like mye. Alle svar må begrunnes.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1 Finn alle primtallene som deler $70!$.

Oppgave 2 Finn alle løsningene til den diofantiske ligningen $78x - 144y = 36$.

Oppgave 3 Vis at $\gcd(7t + 2, 4t + 1) = 1$ for alle heltall t.

Oppgave 4 Vis at

$$13^{81^n} \equiv 13 \pmod{123}$$

for alle positive heltall n.

Oppgave 5

a) Hvilken rest får vi når vi deler $11 \cdot (93!)$ på 97?

b) Finn alle heltall som gir rest 2, 3 og 4 når vi deler dem på henholdsvis 3, 5 og 8. Hva er det minste positive heltallet som tilfredsstiller disse kravene?

Oppgave 6 For to primtall p og q med $p > q$ har vi $pq = 32689$ og $\phi(pq) = 32256$. Finn p og q.

Oppgave 7 La p være et primtall. Finn et enklest mulig uttrykk for Legendre-symbolet

$$\left(\frac{(p-1)!}{p}\right).$$

Oppgave 8 La n være et positivt heltall større enn 1. La $a_1, \ldots, a_{\phi(n)}$ være de positive heltallene som er mindre n og relativt primiske til n, og la r_j være ordenen til a_j modulo n for $j = 1, \ldots, \phi(n)$. Anta at

$$\operatorname{lcm}(r_1, \ldots, r_{\phi(n)}) = n - 1.$$

Vis at da må n være et primtall.

Oppgave 9 Finn et positivt heltall d større enn 1 og mindre enn 11 slik at kongruensen

$$x^d \equiv a \pmod{2022}$$

har en entydig løsning modulo 2022 for alle heltall a. (Hint: Vi har fra Notat 2 om RSA at

$$a^{\phi(n)+1} \equiv a \pmod{n}$$

for alle heltall a hvis og bare hvis n er kvadratfritt. Merk at primtallsfaktoriseringen til 2022 er $2 \cdot 3 \cdot 337$.)