1.2 Binomialteoremet

Binomialkoeffsient: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ hvor $0 \leq k \leq n$ og

$$m! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m \quad \text{og} \quad 0! = 1$$

Eksempel: $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{(1\cdot 2)(1\cdot 2\cdot 3)} = 10$

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1 \quad \forall\, n \geq 0$$

Pascals trekant:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & & & & \vdots & & & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\ & & & \vdots & & & \end{array}$$

Pascals regel: $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

Bevis: $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{k \cdot n!}{k(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{(n-k+1)\,n!}{k!(n-k)!(n-k+1)}$

$$= \frac{k \cdot n! + (n-k+1)n!}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)n!}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k} \quad \square$$

Potenser av $(x+y)$:

$$(x+y)^1 = x+y = \binom{1}{0}x + \binom{1}{1}y$$

$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2 = \binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}xy + \binom{2}{2}y^2$$

$$(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + \binom{3}{3}y^3$$

Binomialteoremet:

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i} = \binom{n}{0}y^n + \binom{n}{1}xy^{n-1} + \binom{n}{2}x^2y^{n-2} + \dots + \binom{n}{n}x^n$$

Eksempler: (1) $x=y=1$: $2^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$

(2) $x=-1, y=1$: $0 = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n\binom{n}{n}$

2.2 Divisjonsalgoritmen

Teorem 2.1 (Divisjonsalgoritmen)

La a og b være heltall med $b>0$. Da finnes unike heltall q og r slik at

$$a = qb + r \quad \text{og} \quad 0 \leq r < b$$

Merk: Tallet r kalles "resten" og q "kvotienten"

Eksempler: (1) $a=13$, $b=3$: $\quad 13 = \underbrace{4}_{q}\cdot 3 + \underbrace{1}_{r}$

$a=24$, $b=4$: $\quad 24 = \underbrace{6}_{q}\cdot 4 + \underbrace{0}_{r}$

$a=-13$, $b=3$: $\quad -13 = \underbrace{(-5)}_{q}\cdot 3 + \underbrace{2}_{r}$

(2) La a være vilkårlig og $b=2$. Da gir dival at

$$a = 2q + r$$

hvor $0 \leq r \leq 1$. Så alle heltall er på form $2q$ (partallene) eller $2q+1$ (oddetallene).

(3) a vilkårlig, $b=3$: $\quad a = 3q+r$ hvor $0 \leq r \leq 2$.

$\Longrightarrow$ alle tall på én av følgende former: $3q$, $3q+1$, $3q+2$

Utfordring: Vis at ethvert oddetall kan uttrykkes som differansen mellom to kvadrattall: hvis n er odde finnes to heltall a og b med $n = a^2 - b^2$.

2.3 Største felles divisor

Def: La a og b være heltall med $b \neq 0$. Da sier vi at <u>b deler a</u> dersom $a = qb$ for en $q \in \mathbb{Z}$. Skriver $b \mid a$, og hvis ikke: $b \nmid a$.

Eksempel: $3 \mid 102$, $3 \nmid 31$

$2 \mid a \iff a$ partall, $2 \nmid a \iff a$ oddetall

<u>Teorem 2.2</u> (Egenskaper)

For heltall a, b, c, d gjelder

(a) $a \mid 0$, $1 \mid a$, $a \mid a$
(b) $a \mid 1 \iff a = \pm 1$
(c) $a \mid b$ og $c \mid d \implies ac \mid bd$
(d) $a \mid b$ og $b \mid c \implies a \mid c$
(e) $a \mid b$ og $b \mid a \iff a = \pm b$
(f) $a \mid b$ og $b \neq 0 \implies |a| \leq |b|$
(g) $a \mid b$ og $a \mid c \implies a \mid (bx + cy)$ $\forall x, y \in \mathbb{Z}$

Bevis: (c) $a \mid b \wedge c \mid d \implies b = q_1 a \wedge d = q_2 c \implies bd = q_1 q_2 ac \implies ac \mid bd$

(d) $a \mid b \wedge b \mid c \implies b = q_1 a \wedge c = q_2 b \implies c = q_1 q_2 a \implies a \mid c$

(e) og (f): argumenter

(g) $a \mid b \wedge a \mid c \implies b = q_1 a \wedge c = q_2 a \implies bx + cy = q_1 ax + q_2 ay = a(q_1 x + q_2 y)$ $\forall x, y$

$\square$

Eksempel: Eksamen V2011, oppg 8

Vis at ligningen

$$y^2 = x^3 - x + 2$$

ikke har noen heltallsløsninger (hint: hva skjer modulo 3?)

Se på VS: alle heltall y er på formen $3q$, $3q+1$ eller $3q+2$

Kvadrat:

$$(3q)^2 = 9q^2 = 3(3q^2)$$
$$(3q+1)^2 = 9q^2 + 6q + 1 = 3(3q^2 + 2q) + 1$$
$$(3q+2)^2 = 9q^2 + 12q + 4 = 3(3q^2 + 4q + 3) + 1$$

Så uansett hva y er vil y^2 være på formen $3k$ eller $3k+1$.

Se på HS: $x^3 - x = x(x^2 - 1) = (x-1)x(x+1)$. Dette er produktet av tre etterfølgende tall, så ett av dem er delelig på 3. Uansett vil $3 \mid (x-1)x(x+1)$, så $x^3 - x + 2$ er på formen $3k+2$.

Oppsummert: uansett hva x og y er, vil VS være på form $3k$ eller $3k+1$, mens HS er på form $3k+2$. Umulig.