NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA1301/MA6301 Tallteori**

Faglig kontakt under eksamen: Øystein Skartsæterhagen

Tlf: 95 92 55 96

Eksamensdato: 15. august 2017

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt. (Casio fx-82ES PLUS, Casio fx-82EX, Citizen SR-270X, Citizen SR-270X College, Hewlett Packard HP30S)

Annen informasjon:
Eksamenen består av ti oppgaver, som alle teller like mye. Alle svar må begrunnes.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 1

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☒	**2-sidig** ☐
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Merk! Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.

Oppgave 1 Finn alle heltallsløsninger av likningen $143x + 364y = 13$ som oppfyller $0 < x < 100$.

Oppgave 2 Vis ved induksjon at

$$\sum_{i=1}^{n} 2^i \cdot i = 2 + 2^{n+1}(n-1)$$

for alle naturlige tall n.

Oppgave 3 Finn det minste naturlige tallet n slik at $n \equiv 21^{547} \pmod{80}$.

Oppgave 4 Finn et heltall a slik at a er en invers til $67!$ modulo 73 og $0 < a < 73$. Løs kongruenslikningen $67! \cdot x \equiv 150 \pmod{73}$.

Oppgave 5 Se på følgende to systemer av kongruenslikninger:

$$\begin{cases} x \equiv 41 & \pmod{9} \\ x \equiv 23 & \pmod{15} \\ x \equiv 17 & \pmod{25} \end{cases} \qquad \begin{cases} y \equiv 52 & \pmod{10} \\ y \equiv 13 & \pmod{3} \\ y \equiv 26 & \pmod{7} \end{cases}$$

For hvert system: Finn ut om systemet er løsbart eller ikke. Finn alle løsninger eller forklar hvorfor det ikke finnes noen løsning.

Oppgave 6 Finn alle tallene mellom 0 og 15 som er relativt primiske til 15, og finn ordenen modulo 15 til hvert av disse tallene. Finnes det en primitiv rot av 15?

Oppgave 7 Alice har en offentlig RSA-nøkkel $(n, e) = (533, 7)$. Finn den tilhørende private nøkkelen.

Oppgave 8 La $p > 2$ være et primtall. Vis at p er en divisor av $\sum_{a=1}^{p} a^p$.

Oppgave 9 La F_n være det n-te fibonaccitallet, altså $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, og så videre. Vis at dersom F_n er et primtall og $n > 4$, så er n også et primtall.

Oppgave 10 La $p > 3$ være et primtall, og la $r_1, r_2, \ldots, r_t$ være alle tallene mellom 0 og p som er primitive røtter av p. Vis at $r_1 r_2 \cdots r_t \equiv 1 \pmod{p}$.

[Hint: Husk at vi har et teorem som sier (for et gitt heltall $n > 1$) at summen av alle naturlige tall som er relativt primiske til n og mindre enn n er lik $\frac{1}{2} n \cdot \varphi(n)$.]