MA1301 TALLTEORI, HØST 2015
LØSNINGSFORSLAG — ØVING 1

Denne øvingen består stort sett av oppgaver som skal løses ved hjelp av induksjon. Jeg vil derfor si litt om metoden før vi går løs på oppgavene.

Første steg i beviset er å sjekke at påstanden er sann for et første naturlig tall. Dette kalles *induksjonsstarten*. ("Påstanden" er ofte en formel, og at "påstanden er sann" betyr i dette tilfellet at formelen holder.)

Det neste vi gjør er å anta at påstanden er sann for $n = k$. (Dette kalles *induksjonshypotesen*.) Vi bruker antagelsen til å vise at da må påstanden være sann for $n = k + 1$ *også*.

Siden vi allerede har vist at påstanden er sann for et første naturlig tall, la oss si for $n = 1$, må den—ved det vi nettopp viste—også være sann for neste naturlige tall, $n = 2$. Men da kan vi igjen konkludere at den holder for $n = 3$, osv. Dermed er påstanden sann for alle $n \geq 1$.

I oppgavene nedenfor vil jeg benytte symbolet $\overset{\text{IH}}{=}$ for å vise hvor induksjonshypotesen blir brukt.

Seksjon 1.1

1c. Vi vil vise at

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}, \quad \text{for } n \geq 1 \tag{1}$$

ved hjelp av induksjon.

Dette holder for $n = 1$: På venstre side av (1) har vi da bare $1 \cdot 2$, og på høyre har vi $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3}$. Vi har likhet, og formelen holder dermed for $n = 1$.

Antar at (1) holder for $n = k$: Så vi har antatt at

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}.$$

Viser at da må (1) holde for $n = k + 1$: Vi setter opp venstre side av formelen og benytter induksjonshypotesen for å komme oss til høyre side av (1) med $n = k + 1$ innsatt.

$$\begin{aligned}1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + k(k+1) + (k+1)(k+2) &\overset{\text{IH}}{=} \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) = (k+1)\left(\frac{k(k+2)}{3} + (k+2)\right) \\ &= (k+1)\frac{k(k+2) + 3(k+2)}{3} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}\end{aligned}$$

Ved induksjonsprinsippet har vi vist at (1) holder for alle $n \geq 1$. (Se diskusjonen over.)

1e. Vi viser at

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2, \quad \text{for } n \geq 1. \tag{2}$$

Vi ser at (2) holder for $n = 1$. Videre antar vi at formelen holder for $n = k$. Vi viser at da må formelen også holde for $n = k + 1$:

$$\begin{aligned}1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 &\overset{\text{IH}}{=} \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 = (k+1)^2\left(\frac{k^2 + 4(k+1)}{4}\right) \\ &= (k+1)^2\frac{(k+2)^2}{4} = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2\end{aligned}$$

10a.

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}, \quad \text{for alle } n \geq 1. \tag{3}$$

Det er tydelig at (3) holder for $n = 1$. Vi antar at den også holder for $n = k$. Vi lar oss ikke skremme av mindre eller lik-symbolet, og fortsetter som før:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{(k+1)^2} &\overset{\text{IH}}{\leq} 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} = 2 - \frac{(k+1)^2 - k}{k(k+1)^2} = 2 - \frac{1}{k+1}\left(\frac{(k+1)^2 - k}{k(k+1)}\right) \\ &= 2 - \frac{1}{k+1}\left(\frac{k^2 + k + 1}{k^2 + k}\right) \overset{(*)}{\leq} 2 - \frac{1}{k+1}\end{aligned}$$

14. Vi lar $a_1 = 11$ og $a_2 = 21$. Så definerer vi $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ for $n \geq 3$. Vi ønsker å vise at for alle $n \geq 1$ er

$$a_n = 5 \cdot 2^n + 1. \tag{4}$$

Vi ser at formelen (4) holder for a_1 og a_2. Vi antar at formelen holder for *både* $n = k$ *og* $n = k - 1$, og ved utregningen under kan vi konkludere at formelen holder for $n = k + 1$:

$$a_{k+1} = 3a_k - 2a_{k-1} \stackrel{\text{IH}}{=} 3(5 \cdot 2^k + 1) - 2(5 \cdot 2^{k-1} + 1) = (15 \cdot 2^k + 3) - (5 \cdot 2^k + 2) = 10 \cdot 2^k + 1 = 5 \cdot 2^{k+1} + 1$$

Denne varianten av induksjon omtales i læreboka som andre induksjonsprinsipp. (I stedet for å anta at påstanden kun holder for $n = k$, kan vi anta at påstanden holder for alle n, $1 \leq n \leq k$, og bruke dette til å vise at da må påstanden holde for $n = k + 1$ også.)

Seksjon 1.2

3d. Her kan det være fristende å prøve seg med induksjon, men langt lettere er det nok å benytte seg av binomialteoremet som denne seksjonen handler om. Det sier at $(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j$, og ved å sette inn $a = 1$ og $b = 2$ har vi bevist det oppgaven spør etter, nemlig at $3^n = \binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \cdots + 2^n\binom{n}{n}$.

7. Vi viser ved induksjon at

$$1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \binom{2n+1}{3}, \quad n \geq 1 \tag{5}$$

Høyre side ser langt mer mystisk ut enn den er: $\binom{2n+1}{3} = \frac{(2n+1)!}{3!(2n-2)!} = \frac{(2n+1)\cdot 2n \cdot (2n-1)}{3!}$.

Siden $1 = \binom{3}{3}$, holder (5) for $n = 1$. Vi antar så at den holder for $n = k$, og viser at da holder den også for $n = k + 1$.

$$\begin{aligned} 1^2 + 3^2 + \cdots + (2k+1)^2 &\stackrel{\text{IH}}{=} \frac{(2k+1)\cdot 2k \cdot (2k-1)}{3!} + (2k+1)^2 = \frac{1}{3!}(2k+1)\big(2k(2k-1) + 6(2k+1)\big) \\ &= \frac{1}{3!}(2k+1)(4k^2 + 10k + 6) = \frac{(2k+1)(2k+2)(2k+3)}{3!} = \binom{2k+3}{3} \end{aligned}$$