NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA1301/MA6301 Tallteori**

Faglig kontakt under eksamen: Johan Steen

Tlf: 41144884

Eksamensdato: 19. desember 2015

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt. (Hewlett Packard HP30S, Citizen SR-270X (College) eller Casio fx-82ES PLUS.)

Annen informasjon:
Dette eksamensettet har 10 deloppgaver som alle vektes likt. Les oppgavene godt; mange av deloppgavene har flere spørsmål.

Alle svar må begrunnes godt. En delvis løsning er mye bedre enn ingenting!

Du kan skrive med både penn og blyant, men husk at dersom du visker, så ødelegger du din eigen kopi.

Lykke til!

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1 La F_n, hvor $n \geq 1$, betegne fibonaccitallene, som er definert rekursivt ved $F_1 = 1 = F_2$ og $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ når $n \geq 3$.

For alle $n \geq 1$, vis at

$$F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}.$$

Oppgave 2 Finn alle løsninger av den lineære kongruensen

$$120x \equiv 9 \pmod{141}.$$

Oppgave 3 Finn alle løsninger av ligningssystemet

$$\begin{aligned} x &\equiv 0 \pmod 9 \\ 2x &\equiv 4 \pmod 8 \\ 3x &\equiv 3 \pmod 5. \end{aligned}$$

Hva er det minste heltallet $x \geq 0$ som løser systemet?

Oppgave 4

a) La $n \geq 1$. Hvordan er $\varphi(n)$ (Eulers φ-funksjon) definert? Hva sier Eulers teorem?

b) Finn resten til 311^{152} når vi deler på 315.

Oppgave 5 Du har satt opp RSA med offentlig nøkkel $(n, e) = (143, 103)$, og mottatt den krypterte meldinga $c = 125$. Dekryptér meldinga, det vil si, løs følgende kongruensligning for m:

$$m^{103} \equiv 125 \pmod{143}$$

Oppgave 6 Gitt et heltall n, finn alle heltallsløsninger (x, y) av ligninga

$$2x + 3y = n.$$

Vis deretter at alle $n \geq 2$ kan skrives på form $2x + 3y$, hvor $x, y \geq 0$.

Oppgave 7 La (x, y, z) være et primitivt pytagoreisk trippel (som betyr at $x, y, z \geq 1$, $\gcd(x, y, z) = 1$ og $x^2 + y^2 = z^2$). Vis at $3 \mid x$ eller $3 \mid y$, men ikke begge samtidig.

Oppgave 8

a) La $n \geq 1$ og la a være et heltall slik at $\gcd(a, n) = 1$. Hvordan er *ordenen til* a *modulo* n definert? Anta så at a har orden k modulo n. Vis at $k \mid \phi(n)$.

b) Anta at $k \geq 1$ og $a \geq 2$. Vis at $k \mid \phi(a^k - 1)$.