MA1301 TALLTEORI, HØST 2015
LØSNINGSFORSLAG – ØVING 7

Avsnitt 6.1

Oppgave 8*.

$$\sum_{d|n} \frac{n}{d} = \sigma(n)$$

bør være opplagt ut fra definisjonen, men kan være vanskelig å formulere i ord.

Oppgave 12a*. Funksjonen τ teller antall divisorer. Vi skal finne alle tall med ti slike. Det kan være greit å starte med teorem 6.2, som gir en viss klassifisering. Siden $\tau(n) = 10$, og $10 = 2 \cdot 5$, kan det kun være tall som består av to primtall p og q, slik at $n = p^4 q$, eller ett primtall $n = p^9$.

Det minste slike tallet får vi ved å sette $p = 2$ og $q = 3$, altså $n = 48$.

Oppgave 12b*. Hintet sier at vi kan løse denne oppgaven ved hjelp av *brute force*. Siden $\sigma(n) > 10$ når $n \geq 10$, holder det å sjekke noen få n-er. For primtallene mindre enn 10 er det greit, for $\sigma(p) = p + 1$, og 9 er ikke et primtall. Da står vi igjen med 4, 6, 8 og 9.

$$\sigma(4) = 1 + 2 + 4 = 7 \qquad \sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$$
$$\sigma(8) = 1 + 2 + 4 + 8 = 15 \qquad \sigma(9) = 1 + 3 + 9 = 13$$

Dermed er det bevist.

Oppgave 17. Vi skal sjekke at f er multiplikativ, jf. definisjon 6.2. Det er bare å plugge inn uttrykket: $f(nm) = (nm)^k = n^k m^k = f(n)f(m)$, som vi skulle vise.

Oppgave 18. To funksjoner er like dersom de gjør det samme. La $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}$ være et vilkårlig heltall. Siden både f og g er multiplikative, har vi da

$$f(n) = f(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}) = f\left(p_1^{a_1}\right) f\left(p_2^{a_2}\right) \cdots f\left(p_r^{a_r}\right) = g\left(p_1^{a_1}\right) g\left(p_2^{a_2}\right) \cdots g\left(p_r^{a_r}\right) = g(n)$$

Siden n var vilkårlig, vil f og g alltid gjøre det samme, og dermed er det samme funksjon.

Avsnitt 7.2

Oppgave 1. Vi skal regne ut φ av tallene 1 001, 5 040 og 36 000. Teorem 7.3 lar oss regne ut φ av disse tallene dersom vi kan finne primtallsfaktoriseringa til tallene. Å faktorisere disse tallene kan gjøres på den naive måten, nemlig sjekke om 2, 3, 5, etc. deler tallene. Men her kan vi spare oss litt arbeid (og bruk av kalkulator) ved å benytte oss av divisibilitetstestene:

1001 har alternerende tverrsum lik 0, så dette tallet er delelig med 11. $1001 = 11 \cdot 91$, og $91 = 7 \cdot 13$, så $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. Ved teorem 7.3 er da

$$\varphi(1001) = 1001(1 - 1/7)(1 - 1/11)(1 - 1/13) = 1001 \frac{6}{7} \frac{10}{11} \frac{12}{13} = 6 \cdot 10 \cdot 12 = 720.$$

5040 har tverrsum 9, så tallet selv er delelig på 9, og dessuten delelig på 10, så $5040 = 9 \cdot 10 \cdot 56 = 3^2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2^3 \cdot 7 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Da er

$$\varphi(5040) = 5040(1 - 1/2)(1 - 1/3)(1 - 1/5)(1 - 1/7) = 5040 \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{4}{5} \frac{6}{7} = 1152.$$

$36000 = 36 \cdot 10^3 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 2^3 \cdot 5^3 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^3$, så

$$\varphi(36000) = 36000(1 - 1/2)(1 - 1/3)(1 - 1/5) = 36000 \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{4}{5} = 9600.$$

Date: 6. oktober 2015.

Oppgave 4a. La $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_s^{k_s}$ være et odde tall. Dette betyr at $2 \nmid n$, så $p_i \neq 2$ for alle i. Primtallsfaktoriseringa til $2n$ er derfor $2p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_s^{k_s}$, og vi har dermed at

$$\varphi(2n) = 2n(1 - 1/2)(1 - 1/p_1) \cdots (1 - 1/p_s) = n(1 - 1/p_1) \cdots (1 - 1/p_s) = \varphi(n).$$

Her brukte vi at $2(1 - 1/2) = 1$.

Alternativt kan man gjøre følgende: Siden n er et odde tall, er $\gcd(2, n) = 1$. Dermed har vi, siden φ er multiplikativ, at

$$\varphi(2n) = \varphi(2)\varphi(n) = 1 \cdot \varphi(n) = \varphi(n).$$

Oppgave 4b. Nå antar vi at n er et partall. Så n har primtallsfaktorisering $n = 2^k p_2^{k_2} \cdots p_s^{k_s}$, hvor $k \geq 1$ og $p_i \neq 2$ for $i \geq 2$. Så $2n$ har primtallsfaktorisering $2n = 2^{k+1} p_2^{k_2} \cdots p_s^{k_s}$. Ved teorem 7.3 får vi da at

$$\varphi(2n) = 2n(1 - 1/2)(1 - 1/p_2) \cdots (1 - 1/p_s) = 2\big[n(1 - 1/2)(1 - 1/p_2) \cdots (1 - 1/p_s)\big] = 2\varphi(n).$$

Denne kan vi også gjøre på en alternativ måte: Siden n er et partall, kan vi skrive $n = 2^t m$, hvor $t \geq 1$ og m er et odde tall. Da er $\gcd(2^k, m) = 1$, for alle $k \geq 1$, så

$$\begin{aligned} 2\varphi(n) &= 2\varphi(2^t m) = 2\varphi(2^t)\varphi(m) = 2(2^t - 2^{t-1})\varphi(m) \\ &= (2^{t+1} - 2^t)\varphi(m) = \varphi(2^{t+1})\varphi(m) = \varphi(2^{t+1} m) = \varphi(2n). \end{aligned}$$

Oppgave 6. Bruk hintet:

$$\varphi(2^{2k+1}) = 2^{2k+1} - 2^{2k} = 2^{2k}(2 - 1) = (2^k)^2$$

som er et kvadrattall.

Oppgave 9b*. Husk at hvis p er et primtall, så er $\varphi(p) = p - 1$. Så hvis også $2p + 1$ er et primtall er $\varphi(2p + 1) = 2p$. Vi får derfor

$$\varphi(4p + 2) = \varphi(2(2p + 1)) = \varphi(2)\varphi(2p + 1) = 2p.$$

Videre blir

$$\varphi(4p) == \varphi(2^2)\varphi(p) = 2(p - 1).$$

□