MA1301 TALLTEORI, HØST 2015
LØSNINGSFORSLAG – ØVING 12

Avsnitt 12.1

Oppgave 1b*. $x = 40$ er partallet i det primitive triplet. Så det holder å finne $s > t > 0$ som i Teorem 12.1 slik at $st = 20$. Så $(s,t) = (20,1)$ eller $(s,t) = (5,4)$. Første tilfellet gir $(40,399,401)$, det andre blir $(40,9,41)$.

$(s,t) = (10,2)$ gir løsningen $(40,96,104)$, men her er ikke gcd=1.

Oppgave 4*. Skriv $xy = 2st(s^2 - t^2)$. 3 deler dette tallet ved ekstraoppgave 1, 4 deler dette tallet fordi enten s eller t er partall. At $60|xyz$ følger da fra ekstraoppgave forrige uke.

Oppgave 8*. Hintet gir at $(x-4)(y-4) = 8$, løsningene med $x < y : (x,y) = (5,12),(6,8)$.

Oppgave 11. Se beviset for Theorem 12.2. Gitt n, det gjelder å finne k,s,t slik at $n = kt(s-t)$ og $s \not\equiv t \pmod 2$. Velg $k = 1, t = n, s = t+1$. Det gir triplet $(2n^2+2n, 2n+1, 2n^2+2n+1)$.

Avsnitt 12.2

Oppgave 1*. Sett $x = n(n^2-3)$ og $y = 3n^2-1$. Da blir $x^2+y^2 = (n+1)^3$.

Oppgave 3. Hvis både x og y er et kvadrattall gir Thm 12.3 en motsigelse.

Hvis både x og z er et kvadrattall gir Thm 12.4 en motsigelse.

Ekstra.1

Vis at hvis (x,y,z) er et primitivt pytagoreisk trippel, så deler 3 nøyaktig én av x og y.

Vi vet at mod 3 har vi at $x^2 \equiv 0$ eller 1. Det gir følgende muligheter:

x^2	y^2	z^2
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	2

Det første er ikke primitivt, og det siste er mulig. Så vi har enten $x^2 \equiv 0 \pmod 3$ eller $y^2 \equiv 0 \pmod 3$. Altså er enten $x \equiv 0 \pmod 3$ eller $y \equiv 0 \pmod 3$.

Ekstra.2

Vis at hvis $b|c$ så er $\gcd(a+c,b) = gcd(a,b)$.

Hvis $b|c$, så gir $d|b$ at $d|c$. Det følger at $d|b$ og $d|(a+c) \iff d|b$ og $d|a$.

Ekstra.3

Vis at dersom a og b er relativt primiske, så er $\gcd(ac,b) = \gcd(c,b)$.

Klart at $d|b$ og $d|c$ implies that $d|ac$, så $\gcd(ac,b) \geq \gcd(c,b)$.

Anta $d|ac$ og $d|b$, med $\gcd(a,b) = 1$. Da må $d|c$ så $\gcd(ac,b) \leq \gcd(c,b)$.

Date: 10. november 2015.

Utfordring

Anta at (x, y, z) er et trippel av positive heltall som oppfyller $\gcd(x, y, z) = 1$ og er en løsning av ligninga

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{z^2}.$$

Vi skal vise at da finnes det et primitivt pytagoreisk trippel (a, b, c), det vil si $a^2+b^2 = c^2$ med $\gcd(a, b, c) = 1$ slik at $x = bc, y = ac, z = ab$.

Først lar vi $c = \gcd(x, y)$. Deretter skriver vi $x = ac, y = bc$. Dette betyr at $\gcd(a, b) = 1$, og dermed er $\gcd(a, b, c) = 1$.

Dermed gjenstår det å vise at $z = ab$ og $a^2 + b^2 = c^2$. Ved å sette inn for x og y i ligninga, har vi

$$\frac{1}{(bc)^2} + \frac{1}{(ac)^2} = \frac{1}{z^2}.$$

Ved å multiplisere med $(abc)^2z^2$ får vi ligninga

$$z^2(a^2 + b^2) = (ab)^2c^2. \tag{1}$$

Fra denne har vi at $z^2 \mid (ab)^2c^2$, så $z \mid (ab)c$. Siden $\gcd(c, z) = \gcd\big(\gcd(x, y), z\big) = \gcd(x, y, z) = 1$, har vi at $z \mid ab$ ved Euklids lemma. På den annen side har vi at $(ab)^2 \mid z^2(a^2 + b^2)$. Nå er $\gcd(a, a^2 + b^2) = \gcd(a, b^2) = \gcd(a, b) = 1$ (her bruker vi ekstraoppgave 2 på denne øvinga), så det følger at $a^2 \mid z^2$, og dermed $a \mid z$. Tilsvarende argument viser at $b \mid z$, så, igjen ved å bruke at $\gcd(a, b) = 1$, får vi at $ab \mid z$. Det følger at $ab = z$, og dermed, fra forrige nummererte ligning, at $a^2 + b^2 = c^2$.

Vi har med andre ord vist at (a, b, c) er et primitivt pytagoreisk trippel slik at $(x, y, z) = (bc, ac, ab)$.

Siden (a, b, c) er et primitivt pytagoreisk trippel, er enten a eller b et partall og det andre odde. La oss anta at b er partallet. Da finnes det, ved Teorem 12.1, positive heltall $s > t$, som er relativt primiske og bare ett er et partall, slik at

$$\begin{aligned} a &= s^2 - t^2 \\ b &= 2st \\ c &= s^2 + t^2. \end{aligned}$$

Dette betyr at alle løsninger av den opprinnelige ligninga

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{z^2}.$$

er gitt på form

$$\begin{aligned} x &= bc = 2st(s^2 + t^2) \\ b &= ac = s^4 - t^4 \\ c &= ab = 2st(s^2 - t^2), \end{aligned}$$

med s og t som over.

Om vi setter $s = 2$ og $t = 1$, får vi løsningen $(x, y, z) = (20, 15, 12)$. Om vi setter $s = 101$ og $t = 32$ får vi $(x, y, z) = (72558400, 103011825, 59320128)$, som den ivrige student kan sjekke at løser ligninga.